



Алгебра


ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

8



Алгебра

8 класс

Учебник

для общеобразовательных
организаций

*Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации*

3-е издание

Москва
«Просвещение»
2016

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
А45

Учебник имеет **положительные экспертные заключения** по результатам
научной (заключение РАН № 10106-5215/293 от 12.10.12),
педагогической (заключения РАО № 290 от 29.01.14, № 005 от 05.02.15)
и **общественной** (заключения РКС № 319 от 07.02.14, № 662 от 01.04.15)
экспертиз

Авторы: *Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович,
Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева, Л. О. Рослова*

Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. организаций /
А45 [Г. В. Дорофеев, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович и др.]. —
3-е изд. — М. : Просвещение, 2016. — 320 с. : ил. —
ISBN 978-5-09-038197-0.

Содержание учебника позволяет достичь планируемых результатов обучения, предусмотренных ФГОС основного общего образования. Учебный текст разбивается на смысловые фрагменты специальными знаками и завершается вопросами, позволяющими проверить, как понято прочитанное. В систему упражнений включены такие виды деятельности, как анализ информации, наблюдение и рассуждение, конструирование алгоритмов, поиск закономерностей, исследование и т. д. Всё это позволяет учащимся активно и осознанно овладевать универсальными учебными действиями. Каждая глава завершается разделом «Чему вы научились», помогающим ученику проверить себя на базовом уровне и оценить возможность выполнения более сложных заданий.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-09-038197-0

© Издательство «Просвещение», 2014
© Художественное оформление.
Издательство «Просвещение», 2014
Все права защищены

Предисловие

В этом году вы продолжите изучение алгебры. Вы узнаете, что в алгебре, как и в арифметике, есть свои дроби — алгебраические — и их тоже можно складывать и вычитать, умножать и делить. Вы узнаете, что, кроме рациональных чисел, которые вам уже хорошо знакомы, есть удивительные и таинственные иррациональные числа, что, кроме корней деревьев, есть совсем другие корни — арифметические, что квадратными бывают не только столы и комнаты, но и уравнения.

Вы познакомитесь с одним из самых важных понятий не только математики, но и многих других наук — с понятием функции. Продолжите вы и изучение закономерностей в мире случайного — законов теории вероятностей и математической статистики.

Учебник и школьные уроки математики помогут вам научиться быть более убедительными в рассуждениях и доказательными в выводах, яснее и чётче выражать свои мысли. Вы научитесь подмечать закономерности, выдвигать и обосновывать связанные с ними гипотезы. Решая задачи, вы научитесь самостоятельно планировать ход решения, чётко излагать его в устной и письменной форме, получать верные ответы. А ещё вы получите примеры того, как можно знания, полученные вами на уроках математики, применять в повседневной жизни.

Учебник поможет вам открывать всё новые и новые страницы этой живой, увлекательной, но, как вы уже знаете, совсем не простой науки — алгебры. Устроен он так же, как уже знакомый вам учебник алгебры для 7 класса. Напомним основные принципы построения учебника и условные обозначения.

Заглянув в **оглавление**, вы увидите, что курс разбит на 6 глав — 6 важных этапов, которые вам предстоит пройти. Главы делятся на пункты. Если вы откроете учебник наугад, то сориентироваться, где вы находитесь, поможет специальная строка вверху этой страницы (вы уже знаете, что такая строка имеет своё название — колоннитул).

Каждый пункт содержит объяснительный текст и упражнения. Объяснительный текст разбит на несколько фрагментов, поэтому читать его можно в несколько приёмов. Ответив на вопросы и выполнив задания, размещённые в конце текста, вы сможете осмыслить прочитанное, проверить, хорошо ли его поняли.

Главное, что надо понять и запомнить, выделено в тексте так:

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Новые термины даны в учебнике **жирным** шрифтом, а некоторые слова и целые фразы, на которые следует обратить внимание, выделены *курсивом*.

Если вы захотите вспомнить, что означает то или иное слово, встречавшееся вам в учебнике ранее, содержание какого-либо правила, то можете обратиться к **предметному указателю**. В нём в алфавитном порядке дан перечень наиболее важных сведений и указаны страницы, на которых можно найти соответствующие разъяснения.

Упражнения в пунктах разделены на группы **А** и **Б**.

Прежде всего следует научиться выполнять задания группы **А**. Задания группы **Б** труднее, но каждому надо попытаться разобрать хотя бы некоторые из них. Ведь так здорово разобраться в чём-то, что казалось сначала трудным, и так приятно, когда понимаешь, как решается хитрая задача.

При изучении математики необходимо постоянно контролировать себя. В этом вам поможет раздел «**Чему вы научились**», он завершает каждую главу. Откройте учебник на странице 62. Вы увидите вопросы по теории, на которые надо уметь отвечать, задания, которые надо научиться решать. Проверить, как усвоен материал главы, вам поможет расположенный здесь тест. Без этих знаний вы не сможете изучать следующие разделы, двигаться дальше в изучении математики.

Одновременно каждая глава содержит материал, который позволит вам выйти за круг обязательных вопросов, углубить свои знания, познакомиться с новыми приёмами решения задач. Это рубрики «**Для тех, кому интересно**» и «**Дополнительные задания**».

Изучая математику, решая математические задачи, вы тренируете свой ум, развиваете свои умственные способности, вы учитесь мыслить, рассуждать, анализировать, делать выводы, подмечать закономерности, строить алгоритмы, искать пути и способы решения проблем. А это необходимо каждому человеку, чем бы он в жизни ни занимался.

Желаем вам успехов!

Авторы

Алгебраические дроби

Изучая арифметику, вы много занимались дробями. В алгебре тоже есть дроби – алгебраические. В этой главе вы научитесь их складывать и вычитать, умножать и делить. При этом в освоении действий с алгебраическими дробями вам очень поможет знание правил действий с обыкновенными дробями. Эти правила стоит повторить, чтобы восстановить свою «математическую форму» после летних каникул.

Полезно повторить и правила действий с натуральными степенями, поскольку вам предстоит освоить свойства степени уже не только с натуральными, но и с целыми показателями. А вот как они связаны с алгебраическими дробями, вы узнаете из этой главы.

1.1 Что такое алгебраическая дробь

1 Вспомните, что вам известно о выполнимости арифметических действий в множестве целых чисел: сумма, разность и произведение двух целых чисел также являются числами целыми. Однако для того чтобы всегда можно было найти частное двух целых чисел (кроме деления на нуль), уже нужны дроби.

Во множестве рациональных чисел, объединяющем целые и дробные числа, частное двух целых чисел выражается дробью, числитель которой равен делимому, а знаменатель — делителю. Например,

$$12:7 = \frac{12}{7}, \quad 8:20 = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}, \quad 3:(-10) = \frac{3}{-10} = -\frac{3}{10}.$$

В некоторых случаях — когда числитель делится на знаменатель — эта дробь может оказаться равной целому числу. Так,

$$20:4 = \frac{20}{4} = 5, \quad (-36):12 = \frac{-36}{12} = -3.$$

2 Похожим образом обстоит дело и с многочленами, которые вы рассматривали в курсе алгебры 7 класса. Вы научились складывать, вычитать и умножать многочлены и знаете, что сумму, разность и произведение двух многочленов всегда можно записать в виде многочлена. Поговорим теперь о делении многочленов.

Возьмём, например, многочлены $x^2 - 4$ и $x - 2$. По смыслу действия деления

$$(x^2 - 4) : (x - 2) = x + 2,$$

так как $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$.

Таким образом, частное многочленов $x^2 - 4$ и $x - 2$ также является многочленом. Говорят, что *многочлен $x^2 - 4$ делится на многочлен $x - 2$* .

Не всегда, однако, один многочлен делится на другой. Например, многочлен $x^2 + 4$ не делится на $x - 2$, так как не существует такого многочлена, который в произведении с двучленом $x - 2$ был бы равен $x^2 + 4$.

Докажем это. Воспользуемся методом рассуждения от противного. Допустим, что существует многочлен A , такой, что выполняется равенство $A(x - 2) = x^2 + 4$. В это равенство вместо переменной можно подставлять любые числа, и при этом всегда должно получаться верное числовое равенство. Однако при $x = 2$ произведение в левой части обращается в нуль, а значение многочлена в правой части равно 8. Таким образом, мы пришли к противоречию, и наше предположение неверно.

Е Чтобы частное любых двух многочленов (кроме случая деления на *нулевой многочлен*, обращающийся в нуль при любых значениях входящих в него переменных) существовало, мы пойдём по уже проторённому пути, а именно будем рассматривать дроби вида $\frac{P}{Q}$, где P и Q — любые многочлены, но $Q \neq 0$, т. е. не является

нулевым многочленом. Такие дроби будем называть *алгебраическими* (их называют также рациональными).

Приведём примеры алгебраических дробей:

$$\frac{ac - 2b}{ab + 3c}; \quad \frac{x^2 + 4}{x - 2}; \quad \frac{8}{15}.$$

Обратите внимание на последний пример: числовые дроби являются одновременно и алгебраическими. (Как мы говорили в 7 классе, числа — это тоже многочлены.)

Точно так же, как и для числовых дробей, будем считать алгебраическую дробь $\frac{P}{Q}$ *частным* от деления многочлена P на многочлен Q :

$$\frac{P}{Q} = P : Q.$$

Например,

$$\frac{ac - 2b}{ab + 3c} = (ac - 2b) : (ab + 3c), \quad \frac{x^2 + 4}{x - 2} = (x^2 + 4) : (x - 2).$$

При $Q = 1$ частное $\frac{P}{Q} = P : 1 = P$ есть многочлен, поэтому любой многочлен можно записать в виде дроби со знаменателем, равным 1:

$$3x^2y + 5xy^2 = \frac{3x^2y + 5xy^2}{1}.$$

Легко заметить аналогию — любое целое число можно записать в виде дроби со знаменателем 1.

4 Как и в любых алгебраических выражениях, переменные в алгебраической дроби можно заменять числами. Однако необходимо помнить:

в алгебраическую дробь нельзя подставлять числа, которые обращают её знаменатель в нуль.

В таблице приведены несколько дробей и для каждой из них указано, какие числа не входят в *множество допустимых значений переменных*.

Дробь	$\frac{1}{6x}$	$\frac{2a}{5+a}$	$\frac{c+1}{2c-4}$	$\frac{10}{y^2-1}$	$\frac{3-2b}{1+b^2}$
Значения переменных, не являющиеся допустимыми	0	-5	2	1 и -1	Таких значений нет

Вы можете получить эти результаты самостоятельно, приравняв знаменатель каждой дроби к нулю и решив соответствующее уравнение.

- Найдите частное двух целых чисел: $17 : 9$; $16 : (-24)$; $12 : 4$.
Приведите два примера деления целых чисел: первый, когда в частном получается целое число, и второй, когда в частном получается дробь.
- Докажите, что $(x+1)^2$ делится на $x+1$ и не делится на $x-1$, рассуждая таким же образом, как во фрагменте 2.
- а) Во фрагменте 3 алгебраическая дробь в общем виде записана как $\frac{P}{Q}$.
Что в этой записи обозначают буквы P и Q ? В каждой алгебраической дроби, рассмотренной в этом фрагменте, назовите многочлен P и многочлен Q .
б) Среди многочленов $x^2 - x$, $x - x$ и $x + x$ найдите нулевой многочлен.
- Какие числа нельзя подставлять вместо букв в алгебраическую дробь? Входит ли в множество допустимых значений дроби $\frac{8a}{a-4}$ число 0; -4; 4?

А

- 1 РАБОТАЕМ С СИМВОЛАМИ** Перепишите данное выражение, заменив знак : чертой дроби:
- а) $4a : (8bc)$; в) $5c + 3c : (2c + 4)$;
 б) $(a + b) : (2a - 3c)$; г) $(2x + a) : 2x - a$.
- 2 ДОКАЗЫВАЕМ** Используя определение частного, докажите, что:
- а) $(9x^2 - 4y^2) : (3x + 2y) = 3x - 2y$;
 б) $(4a^2 - 20a + 25) : (2a - 5) = 2a - 5$;
 в) $\frac{3m^3 - 6m^2 - 3m}{m^2 - 2m - 1} = 3m$;
 г) $\frac{4a^2 - 11a - 3}{a - 3} = 4a + 1$.
- 3 РАССУЖДАЕМ** Составьте какое-нибудь выражение, которое делится на каждое из данных выражений:
- а) ab, bc ; г) $a + b, a - b$;
 б) x^2y, xy^2, xy ; д) $(p + q)^2, 2(p + q)$;
 в) a^2, b^2, c^2, abc ; е) $m^2 - n^2, 5(m - n)$.
- 4** Найдите значение дроби при указанных значениях переменных:
- а) $\frac{a+b}{a-b}$ при $a = -0,7, b = 1,7$;
 б) $\frac{mn}{m-n}$ при $m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{3}$;
 в) $\frac{3x+2y}{x-y}$ при $x = -0,4, y = 0,6$;
 г) $\frac{a^2+b^2}{ab}$ при $a = -2, b = 5$.
- 5** Подберите значения a , при которых значение выражения $\frac{1}{a}$ является: а) дробным числом; б) целым числом; в) положительным дробным числом, меньшим 1; г) дробным числом, большим 1; д) отрицательным целым числом, меньшим -100.
- 6** Известно, что $x + y = 1$ и $x - y = \frac{2}{3}$. Найдите значение выражения: а) $\frac{x+y}{x-y}$; б) $\frac{y-x}{x+y}$; в) $\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}$; г) $\frac{(y-x)^2}{x+y}$.

7 Найдите допустимые значения переменной для дроби:

а) $\frac{c}{c+2}$; в) $\frac{n^2-1}{n}$; д) $\frac{x-7}{2x+8}$; ж) $\frac{2a-3}{a^2}$;
 б) $\frac{x-1}{x-2}$; г) $\frac{y-4}{3y}$; е) $\frac{a^2-1}{15}$; з) $\frac{x^2}{x^2+3}$.

8 Используя данные выражения, составьте две дроби и найдите допустимые значения переменной для каждой из них:

а) $p^2 + 1$ и $p + 1$; б) $(c + 1)^2$ и $c^2 + 1$.

9 Для каждого выражения из верхнего ряда укажите множество допустимых значений переменной, выбрав их из нижнего ряда:

1) $\frac{x-1}{(x-2)(x-3)}$ 2) $\frac{(x-2)(x-3)}{x-1}$ 3) $\frac{x^2}{x^2+1}$ 4) $\frac{x^2+1}{x^2}$

А) $x \neq 0$ Б) $x \neq 1$ В) $x \neq 2$; $x \neq 3$ Г) x — любое число

■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ (10–11) ■

10 а) Из формулы скорости равноускоренного движения $v = v_0 + at$, где v_0 — начальная скорость, a — ускорение, t — время движения, выразите a и t .

б) Из формулы пути равномерного движения $s = s_0 + vt$, где s_0 — начальное расстояние, v — скорость, t — время движения, выразите v и t .

11 Составьте выражение по условию задачи:

а) Сколько времени потребуется, чтобы проплыть на моторной лодке s км по течению реки, если собственная скорость лодки v км/ч, скорость течения реки u км/ч? Найдите это время, если $s = 30$, $v = 10$, $u = 2$; $s = 32$, $v = 15$, $u = 1$.

б) Какое время потребуется катеру, чтобы проплыть s км против течения реки и вернуться обратно, если его собственная скорость v км/ч, а скорость течения реки u км/ч? Найдите это время, если $s = 30$, $v = 22$, $u = 2$.

в) Пловец проплыл l м по течению реки за t мин. Чему равна собственная скорость пловца, если скорость течения реки u м/мин? Найдите скорость пловца, если $l = 300$, $t = 5$, $u = 20$.



Б

- 12** Упростите дробь и найдите её значение при указанных значениях переменных:

а) $\frac{x^2 - xy + y^2 - (x - y)^2}{x + y}$ при $x = 0,3$ и $y = 0,5$;

б) $\frac{m - 4}{(m + n)^2 - (m - n)^2}$ при $m = \frac{2}{3}$ и $n = -\frac{3}{4}$;

в) $\frac{(a + b)^2 - 4ab}{a + b}$ при $a = 0,74$ и $b = -0,26$;

г) $\frac{cd}{2(c - d)(c + d) - (c - d)^2 + 4d^2}$ при $c = -1$ и $d = 11$.

- 13** Найдите допустимые значения переменной для дроби:

а) $\frac{(a + 1)(a + 3)}{2a(a - 4)}$; в) $\frac{2x - 3}{2x^2 + 10x}$; д) $\frac{b + 3}{b^2 - 6b + 9}$;

б) $\frac{4c}{(c - 5)(2c - 4)}$; г) $\frac{5a}{a^2 - 36}$; е) $\frac{2n - 5}{4n^2 + 4n + 1}$.

■ РАССУЖДАЕМ (14–15) ■

- 14** Укажите несколько пар значений переменных, при которых выражение не имеет смысла:

а) $\frac{x + y}{x - y}$; б) $\frac{a - b}{ab}$; в) $\frac{ab}{(a - 2)(b - 3)}$; г) $\frac{2c}{ac - 12}$.

- 15** Подберите, если возможно, такие значения переменных, при которых дробь: 1) не имеет смысла; 2) равна 0:

а) $\frac{x + y}{x^2 + y^2}$; б) $\frac{x^2 + y^2}{x + y}$; в) $\frac{x + y}{x^2 - y^2}$.

- 16** Выясните, имеет ли смысл выражение $\frac{x - 1 + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}}$ при $x = 0$; $x = 1$;

$x = -1$; $x = \frac{1}{2}$. Если имеет, то найдите его значение.

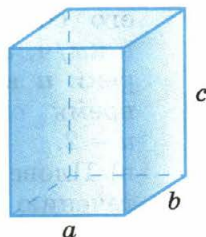
■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ (17–18) ■

- 17** Выразите из формулы:

а) $l' = l(1 + \alpha\tau)$ переменные l и τ ;

б) $Q = cm(t_2 - t_1)$ переменные m , t_2 и t_1 .

- 18** а) Площадь поверхности параллелепипеда можно найти по формуле $S = 2(ab + bc + ac)$ (рис. 1.1). Выразите из этой формулы высоту параллелепипеда c .



■ Рис. 1.1

б) Площадь поверхности прямого кругового цилиндра (рис. 1.2) можно найти по формуле $S = 2\pi r(r + h)$. Выразите из этой формулы высоту цилиндра h .

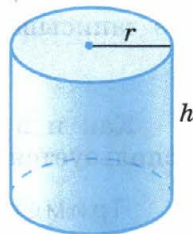


Рис. 1.2

- 19 ■ ИССЛЕДУЕМ ■** 1) Сравните значения выражения $\frac{x^2 + y^2}{xy}$ при $x = -2$, $y = 5$ и при $x = 5$, $y = -2$.

Изменится ли данное выражение, если вместо переменной x подставить переменную y , а вместо переменной y — переменную x ? Проверьте свой ответ, выполнив такую замену.

2) Выражение с двумя переменными, например x и y , называют *симметрическим*, если оно не меняется при подстановке y вместо x и x вместо y . Какие из следующих выражений являются симметрическими: $x^3 + y^3$, $x^2 - y^2$, $x(x + y)$, $xy(x + y)$, $\frac{x^2 + y^2}{y}$, $\frac{(x - y)^2}{xy}$, $(x + y)^2 - 2xy$?

3) Придумайте примеры симметрических выражений.

1.2 Основное свойство дроби

- 1** Источником правил действий с алгебраическими дробями являются известные из арифметики правила действий с обыкновенными дробями. Это легко объяснимо: буквы в алгебре — обобщённые обозначения конкретных чисел, законы алгебры соответствуют законам арифметики. Поэтому действия с алгебраическими дробями, любые преобразования этих дробей проводятся по тем же правилам, что и с обыкновенными дробями.

Вам известно основное свойство обыкновенной дроби, согласно которому при умножении или делении числителя и знаменателя дроби на одно и то же отличное от нуля число получается дробь, равная данной. Например,

$$\frac{13}{17} = \frac{13 \cdot 4}{17 \cdot 4} = \frac{52}{68}, \quad \frac{75}{114} = \frac{25 \cdot 3}{38 \cdot 3} = \frac{25}{38}.$$

Аналогичным свойством обладают и алгебраические дроби:

Если числитель и знаменатель алгебраической дроби умножить или разделить на один и тот же ненулевой многочлен, то получится дробь, равная данной.

Это основное свойство алгебраической дроби. С помощью букв его записывают так:

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C}, \text{ где } C \neq 0.$$

Как и в арифметике, основное свойство алгебраической дроби используется для преобразования дробей.

Пример 1. Приведём дробь $\frac{3}{x-y}$ к знаменателю $2(x^2 - y^2)$.

Так как $2(x^2 - y^2) = 2(x - y)(x + y)$, то новый знаменатель отличается от исходного множителем $2(x + y)$.

Значит, числитель и знаменатель дроби $\frac{3}{x-y}$ надо умножить на дополнительный множитель $2(x + y)$:

$$\frac{3}{x-y} = \frac{3 \cdot 2(x+y)}{(x-y) \cdot 2(x+y)} = \frac{6(x+y)}{2(x^2 - y^2)}.$$

Пример 2. Сократим дробь $\frac{ax^2 + bx}{ax^2}$.

Разложим числитель дроби на множители и выделим в числителе и знаменателе общий множитель:

$$\frac{ax^2 + bx}{ax^2} = \frac{x(ax + b)}{x \cdot ax} = \frac{ax + b}{ax}.$$

Дальнейшее сокращение дроби невозможно.

2 Из основного свойства алгебраической дроби можно получить важное следствие, которое удобно использовать при преобразовании дробей:

$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}.$$

Понятно, что вторая дробь получается из первой умножением числителя и знаменателя на (-1) . Итак,

Если и числитель, и знаменатель дроби заменить на противоположные выражения, то получится дробь, равная данной.

Дробь $\frac{-A}{-B}$ можно переписать, поставив один из минусов перед дробью. Поэтому $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} = -\frac{A}{-B} = -\frac{-A}{B}$.

Если числитель или знаменатель дроби заменить на противоположное выражение и при этом поменять знак перед дробью, то получится дробь, равная данной.

Этими равенствами часто пользуются из соображений эстетики: лучше воспринимаются дроби, у которых числитель и знаменатель не начинаются со знака «минус».

Пример 3. Преобразуем дробь $\frac{-x-y}{-2x+y}$, заменив двучлены в числителе и знаменателе на противоположные:

$$\frac{-x-y}{-2x+y} = \frac{x+y}{2x-y}.$$

Пример 4. Сократим дробь $\frac{a^2-b^2}{4b-4a}$.

Разложим на множители числитель и знаменатель дроби:

$$\frac{a^2-b^2}{4b-4a} = \frac{(a-b)(a+b)}{4(b-a)}.$$

Множители $a-b$ и $b-a$ «почти одинаковы» — они различаются только знаками. Чтобы дробь можно было сократить, заменим, например, выражение $b-a$ в знаменателе на $a-b$ и при этом поставим знак «минус» перед дробью:

$$\frac{(a-b)(a+b)}{4(b-a)} = -\frac{(a-b)(a+b)}{4(a-b)} = -\frac{(a+b)}{4}.$$

- Приведите дробь $\frac{13}{17}$ к знаменателю 51 и сформулируйте свойство, которым вы при этом пользуетесь. Примените это свойство к сокращению дроби $\frac{60}{75}$.
- а) Какие преобразования алгебраической дроби можно выполнять на основе основного свойства алгебраической дроби (примеры 1 и 2 из фрагмента 1)? Сформулируйте это свойство.
б) Приведите дробь из примера 1 к знаменателю $x^2 - xy$.
в) Сократите дробь $\frac{ac^2}{ac-bc}$, действуя по тому же плану, что и в примере 2.
- а) Запишите равенство, которое получится в результате умножения числителя и знаменателя дроби $\frac{A}{B}$ на (-1) . Прочитайте в учебнике соответствующее свойство алгебраической дроби (фрагмент 2).
б) Сократите дробь $\frac{3x-3y}{y^2-x^2}$, действуя по тому же плану, что и в примере 4. Прочитайте свойство, которым вы при этом пользовались.

А

20 Дополните равенства:

а) $\frac{5}{a} = \frac{\quad}{2a} = \frac{\quad}{a^2} = \frac{5c}{\quad} = \frac{5(a+b)}{\quad};$

б) $\frac{x-y}{x+y} = \frac{\quad}{(x+y)^2} = \frac{(x-y)^2}{\quad} = \frac{\quad}{ax+ay} = \frac{x^2-xy}{\quad}.$

21 Приведите дробь:

- а) $\frac{a}{c}$ к знаменателю $2c$; ac ; $-c$; c^2 ; $3c^2$;
 б) $\frac{x+y}{xy}$ к знаменателю x^2y^2 ; xy^2 ; x^3y ; $2xy$; $-xy$;
 в) $\frac{m}{m-n}$ к знаменателю $m(m-n)$; m^2-n^2 ; m^2n-mn^2 ;
 г) $\frac{x-1}{x+1}$ к знаменателю $(x+1)^2$; x^2-1 ; x^2+x .

Сократите дробь (22—25).

- 22 а) $\frac{16x}{4}$; б) $\frac{10}{15m}$; в) $\frac{3x}{2ax}$; г) $\frac{12xy}{20y}$.
 23 а) $\frac{18ab^2}{18ab}$; б) $\frac{abc}{a^2c^2}$; в) $\frac{xy^3z^5}{x^5y^3z}$;
 б) $\frac{2x^2y}{10xy^2}$; г) $\frac{24m^3n}{16m^2n^2}$; е) $\frac{2^5p^4q^4}{2^6p^8q^2}$.
 24 а) $\frac{2a-2c}{8a}$; б) $\frac{10m-5n}{5n}$; в) $\frac{3x+3y}{3x-3y}$; г) $\frac{2ab-2c}{2ac-2b}$.
 25 а) $\frac{am}{am+m}$; б) $\frac{ac-ab}{abc}$; в) $\frac{3xy}{3x^2y-6xy}$;
 б) $\frac{x}{xy-x}$; г) $\frac{a^2b+ab}{ab}$; е) $\frac{2mnp}{2m^2p-6mp}$.

26 Разложите на множители числитель и знаменатель дроби и сократите её:

- а) $\frac{ax-bx}{mx+nx}$; б) $\frac{x^2-2x}{xy-2y}$; в) $\frac{a^2+ab}{a^2+ac}$;
 б) $\frac{am-an}{bm-bn}$; г) $\frac{d^2-d}{d^2+d}$; е) $\frac{y^2+xy}{x^2+xy}$.

Сократите дробь (27—30).

- 27 а) $\frac{y^3}{y^3+y^2}$; б) $\frac{x^5+x^3}{x^2+1}$; в) $\frac{m^4-m^3}{m^2+m^3}$;
 б) $\frac{5a^2}{a^4+a^2}$; г) $\frac{b^5-b^4}{b^5}$; е) $\frac{n^2-n-1}{n^4-n^3-n^2}$.
 28 а) $\frac{x^2-9y^2}{x+3y}$; б) $\frac{m^2-n^2}{mn-n^2}$; в) $\frac{2ab-6a}{b^2-6b+9}$;
 б) $\frac{a+2b}{a^2+4ab+4b^2}$; г) $\frac{ax-ay}{x^2-2xy+y^2}$; е) $\frac{5n^2+10n}{n^2-4}$.

- 29 а) $\frac{x^2y - xy^2}{x^2 - xy}$; б) $\frac{m(m^2 - n^2)}{m^2n + mn^2}$; в) $\frac{a(9 - a^2)}{3a + a^2}$;
 г) $\frac{3ac + 6a}{ac^2 + 2ac}$; д) $\frac{4a - 2a^2}{4b - 2ab}$; е) $\frac{ac^2 - bc^2}{c(a^2 - b^2)}$;
 30 а) $\frac{x^2 - y^2}{(x + y)^2}$; б) $\frac{(x - y)^2}{x^2 - y^2}$; в) $\frac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9}$; г) $\frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 25}$.

31 Восстановите запись:

- а) $\frac{m}{n} = -\frac{-m}{-n} = -\frac{-m}{-n}$;
 б) $\frac{a}{a - b} = \frac{-a}{-a + b} = -\frac{-a}{b - a}$;
 в) $\frac{x - z}{x - y} = \frac{-(x - z)}{-(x - y)} = -\frac{x - z}{x - y}$;
 г) $\frac{p - c}{p + c} = -\frac{-(p - c)}{-(p + c)} = \frac{p - c}{-p - c}$.

32 Какие из следующих выражений равны дроби $\frac{x}{y}$?

- 1) $\frac{-x}{-y}$ 2) $-\frac{-x}{-y}$ 3) $-\frac{-x}{y}$ 4) $-\frac{x}{y}$

33 Замените выражение равным ему так, чтобы перед дробью не было знака «минус»:

- а) $-\frac{a - b}{a - c}$; б) $-\frac{-x - 1}{x + 2}$; в) $-\frac{m - n}{mn}$; г) $-\frac{2x^2}{x - y}$.

Образец. Способ 1. $-\frac{a - 3}{a - 1} = \frac{-(a - 3)}{a - 1} = \frac{3 - a}{a - 1}$.

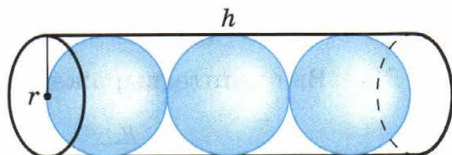
Способ 2. $-\frac{a - 3}{a - 1} = \frac{a - 3}{-(a - 1)} = \frac{a - 3}{1 - a}$.

34 Замените выражение равным ему так, чтобы перед дробью стоял знак «минус»:

- а) $\frac{x}{1 - y}$; б) $\frac{m - n}{m - p}$; в) $\frac{a + p}{b + p}$;
 г) $\frac{a - 5}{a}$; д) $\frac{x + y}{x - z}$; е) $\frac{-b - c}{a - c}$.

Б

- 35 ■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ ■ а) В футляре цилиндрической формы уложены 3 теннисных мяча так, что они касаются крышек и стенок футляра (рис. 1.3). Какую часть объёма футляра занимают мячи?



■ Рис. 1.3

(При решении пользуйтесь формулами объёма шара и объёма цилиндра: $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi r^3$, где r — радиус шара; $V_{\text{цилиндра}} = \pi r^2 h$, где r — радиус основания цилиндра и h — его высота.)

Указание. Выразите высоту h через радиус r .

б) В коробку уложены 3 банки консервов цилиндрической формы так, что они касаются друг друга и всех стенок коробки (рис. 1.4). Какую часть объёма коробки занимают банки? Выразите ответ обыкновенной дробью, считая, что $\pi \approx 3$.

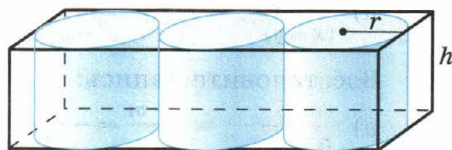


Рис. 1.4

Сократите дробь (36—37).

- 36** а) $\frac{x^3 - xy^2}{x^2 - xy}$; в) $\frac{3a^2 - 6ab + 3b^2}{6a - 6b}$; д) $\frac{p^3 - p}{p^2 - p}$;
 б) $\frac{2z^2 - 8}{6z^2 + 12z}$; г) $\frac{an + 3a}{an^2 + 6an + 9a}$; е) $\frac{a^2b + ab^2}{a^3b - ab^3}$.
- 37** а) $\frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2}$; в) $\frac{(x+y)^2}{x^3 + y^3}$; д) $\frac{x^2 - y^2}{(x-y)^2(x+y)^2}$;
 б) $\frac{x^3 - y^3}{(x-y)^2}$; г) $\frac{x^3 + y^3}{x^3 - x^2y + xy^2}$; е) $\frac{(x-y)^2(x+y)^2}{x^4 - y^4}$.

Подсказка. Могут потребоваться формулы

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) \text{ и } x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2).$$

- 38** Разложите на множители числитель и знаменатель дроби и сократите её:

- а) $\frac{ax - ay}{ax + bx - ay - by}$; г) $\frac{ax + ay - x^2 - xy}{ab + ac - bx - cx}$;
 б) $\frac{mn - pq + mq - pn}{pq + pn}$; д) $\frac{x^2 + 2xy + y^2 - z^2}{x + y + z}$;
 в) $\frac{ab + 1 + a + b}{ab + a}$; е) $\frac{a^2 + b^2 - 2ab - c^2}{a^2 - b^2 - c^2 - 2bc}$.

- 39** Выпишите выражения, равные дроби $\frac{p+a}{p-b}$:

$$\begin{array}{cccc} \frac{p+a}{b-p}; & -\frac{p-a}{p-b}; & \frac{p-a}{p-b}; & -\frac{p+a}{b-p}; \\ -\frac{p-a}{p-b}; & -\frac{p-a}{b-p}; & \frac{p-a}{b-p}; & \frac{p-a}{b-p}. \end{array}$$

Сократите дробь (40—42).

40 а) $\frac{m-n}{n-m}$; в) $\frac{a^2(a-2)}{a(2-a)}$; д) $\frac{a(a-3)^2}{b(3-a)^2}$;

б) $\frac{2(x-y)}{x(y-x)}$; г) $\frac{x^2(c-x)}{cx(x-c)}$; е) $\frac{b^2c(b-c)}{bc(c-b)^2}$.

41 а) $\frac{y^2-y}{1-y^2}$; г) $\frac{5a^2-10ab}{2b^2-ab}$; ж) $\frac{x^3-x}{x-x^2}$;

б) $\frac{a^2-4}{2a-a^2}$; д) $\frac{m^2-n^2}{(n-m)^2}$; з) $\frac{a^2x-ax^2}{x^2-ax}$;

в) $\frac{3x-3c}{ac-ax}$; е) $\frac{z^2-3z}{9-6z+z^2}$; и) $\frac{p^2-2pn+n^2}{n^2-pn}$.

42 а) $\frac{a(x-y)-b(y-x)}{(a-b)(y-x)}$; в) $\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{(a-p)(b-p)(c-p)}$;

б) $\frac{(1-n)(n-2)}{2(n-1)-n(n-1)}$; г) $\frac{(a+b-c)(a-b)}{(c-a-b)(a-c)}$.

43 ■ ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО ■ Учащиеся выполняли задания на сокращение дробей. Ниже показано, как начали преобразования Андрей (А) и Борис (Б). Правильно ли сделал первые шаги каждый из учащихся? Если нет, то исправьте ошибку. Доведите каждое решение до конца.

А) $\frac{(2a-2b)^2}{8b-8a} = \frac{2(a-b)^2}{8(b-a)} = \dots$

Б) $\frac{4m^2-4n^2}{(4n-4m)^2} = \frac{4(m^2-n^2)}{16(n-m)^2} = -\frac{(m-n)(m+n)}{4(m-n)^2} = \dots$

1.3 Сложение и вычитание алгебраических дробей

1 Вы знаете, как складывают и вычитают обыкновенные дроби с одинаковыми знаменателями. Например,

$$\frac{7}{11} + \frac{3}{11} = \frac{10}{11}, \quad \frac{7}{11} - \frac{3}{11} = \frac{4}{11}.$$

По таким же правилам складывают и вычитают и алгебраические дроби с одинаковыми знаменателями.

Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить тем же.

Чтобы вычесть дроби с одинаковыми знаменателями, нужно из числителя первой дроби вычесть числитель второй, а знаменатель оставить тем же.

С помощью букв *правила сложения и вычитания алгебраических дробей* с одинаковыми знаменателями записываются так:

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}, \quad \frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A-B}{C}.$$

Пример 1. Найдём сумму и разность дробей $\frac{a+b}{ab}$ и $\frac{a-b}{ab}$:

$$\frac{a+b}{ab} + \frac{a-b}{ab} = \frac{(a+b) + (a-b)}{ab} = \frac{a+b+a-b}{ab} = \frac{2a}{ab} = \frac{2}{b};$$

$$\frac{a+b}{ab} - \frac{a-b}{ab} = \frac{(a+b) - (a-b)}{ab} = \frac{a+b-a+b}{ab} = \frac{2b}{ab} = \frac{2}{a}.$$

2 Правила сложения и вычитания алгебраических дробей с разными знаменателями аналогичны соответствующим правилам действий с обыкновенными дробями.

Если дроби имеют разные знаменатели, то их сначала нужно привести к общему знаменателю, после чего воспользоваться правилами сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.

В качестве общего знаменателя дробей можно взять любое выражение, которое делится на каждый из знаменателей, в частности всегда можно взять произведение знаменателей данных дробей.

Пример 2. Найдём сумму и разность дробей $\frac{1}{a+b}$ и $\frac{1}{a-b}$:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} = \frac{a-b}{(a+b)(a-b)} + \frac{a+b}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a-b) + (a+b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{2a}{a^2 - b^2};$$

$$\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} = \frac{(a-b) - (a+b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{-2b}{a^2 - b^2} = \frac{2b}{b^2 - a^2}.$$

Часто при сложении и вычитании дробей можно найти более простой общий знаменатель, чем произведение их знаменателей.

Пример 3. Представим в виде дроби выражение

$$\frac{c}{3ab} + \frac{b}{4ac} - \frac{a}{6bc}.$$

Произведение знаменателей данных дробей равно $3ab \cdot 4ac \cdot 6bc = 72a^2b^2c^2$. Но в качестве общего знаменателя удобнее взять более простое выражение $12abc$. Действительно, общий знаменатель должен делиться и на ab , и на ac , и на bc , а для этого достаточно, чтобы каждая из переменных a , b и c входила в него в первой степени. В качестве коэффициента для простоты вычислений удобно взять наименьшее общее кратное чисел 3, 4 и 6.

Таким образом,

$$\frac{c}{3ab} + \frac{b}{4ac} - \frac{a}{6bc} = \frac{c \cdot 4c}{3ab \cdot 4c} + \frac{b \cdot 3b}{4ac \cdot 3b} - \frac{a \cdot 2a}{6bc \cdot 2a} = \frac{4c^2 + 3b^2 - 2a^2}{12abc}.$$

Пример 4. Преобразуем в дробь выражение

$$\frac{y}{x^2 - xy} + \frac{2}{x - y}.$$

Разложим на множители знаменатель первой дроби:

$$x^2 - xy = x(x - y).$$

Теперь ясно, что это выражение делится на $x - y$, а значит, его можно принять за общий знаменатель дробей.

Получим

$$\frac{y}{x^2 - xy} + \frac{2}{x - y} = \frac{y}{x(x - y)} + \frac{2x}{(x - y)x} = \frac{y + 2x}{x(x - y)}.$$

Запись можно вести короче, указывая дополнительные множители:

$$\frac{y}{x^2 - xy} + \frac{2x}{x - y} = \frac{y + 2x}{x(x - y)}.$$

3 Пример 5. Представим в виде дроби выражение

$$a + \frac{a^2}{1 - a}.$$

Сначала первое слагаемое запишем в виде дроби со знаменателем 1, а затем приведём эту дробь к знаменателю $1 - a$; тогда дальше можно будет воспользоваться правилом сложения дробей с одинаковыми знаменателями. Получим

$$a + \frac{a^2}{1 - a} = \frac{a}{1} + \frac{a^2}{1 - a} = \frac{a(1 - a) + a^2}{1 - a} = \frac{a - a^2 + a^2}{1 - a} = \frac{a}{1 - a}.$$

Заметим, что решение можно записать короче, пропустив некоторые промежуточные шаги, например так:

$$a + \frac{a^2}{1 - a} = \frac{a(1 - a) + a^2}{1 - a} = \frac{a - a^2 + a^2}{1 - a} = \frac{a}{1 - a}.$$

- Сформулируйте правила сложения и вычитания алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями (фрагмент 1) и примените эти правила для нахождения разности дробей $\frac{x-a}{ax}$ и $\frac{x-2a}{ax}$.
- Прокомментируйте каждый шаг преобразования суммы и разности дробей в примере 2 (фрагмент 2).
- Найдите самый простой общий знаменатель следующих дробей и объясните свои действия: а) $\frac{a}{a-b}$ и $\frac{b}{a}$; б) $\frac{1}{xy^2}$ и $\frac{1}{x^2y}$; в) $\frac{b}{a^2-ab}$ и $\frac{a}{ab-b^2}$.
- Разберитесь, как выполнено сложение выражений в примере 5 (фрагмент 3), и найдите разность этих выражений. Комментируйте каждый шаг.

A

ДЕЙСТВУЕМ ПО ПРАВИЛУ (44–47) Выполните сложение или вычитание дробей.

- 44** а) $\frac{5a}{12} + \frac{a}{12}$; в) $\frac{3p^2}{10c} - \frac{7p^2}{10c} - \frac{p^2}{10c}$;
 б) $\frac{14b^2}{5} - \frac{9b^2}{5}$; г) $\frac{5}{3m} - \frac{7}{3m} - \frac{1}{3m}$.
- 45** а) $\frac{2a-1}{2} + \frac{a+4}{2}$; в) $\frac{x-y}{z} - \frac{x+y}{z}$;
 б) $\frac{c+3}{3} - \frac{5c}{3}$; г) $\frac{m+3}{n} + \frac{m-3}{n}$.
- 46** а) $\frac{ax}{x+y} + \frac{ay}{x+y}$; в) $\frac{m^2}{m+n} - \frac{n^2}{m+n}$; д) $\frac{2}{1-x^2} - \frac{2x}{1-x^2}$;
 б) $\frac{a}{a-1} - \frac{1}{a-1}$; г) $\frac{c}{c^2-9} + \frac{3}{c^2-9}$; е) $\frac{5p}{p^2-q^2} + \frac{5q}{p^2-q^2}$.
- 47** а) $\frac{4a+1}{3a-3} - \frac{a+1}{3a-3}$; в) $\frac{x+a}{a-5} - \frac{x+5}{a-5}$; д) $\frac{k^2+k}{k^2-9} - \frac{7k-9}{k^2-9}$;
 б) $\frac{3a+2b}{a+b} + \frac{2a+3b}{a+b}$; г) $\frac{2mn}{m^2-n^2} + \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$; е) $\frac{2a^2}{a^2-4a+4} - \frac{a^2+4}{a^2-4a+4}$.
- 48** Приведите дроби к общему знаменателю:
- а) $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{5}$; г) $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{3a}$; ж) $\frac{c}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{c^2}{ab}$;
 б) $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{9}$; д) $\frac{c}{ab}$ и $\frac{a}{bc}$; з) $\frac{c-x}{c+x}$ и $\frac{cx}{c-x}$;
 в) $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$; е) $\frac{1}{x^2y}$ и $\frac{1}{xy^2}$; и) $\frac{a-b}{a^2+ab}$ и $\frac{a^2+b}{b^2+ab}$.

Приведите дроби к общему знаменателю и выполните сложение или вычитание; в качестве образца используйте пример 2 из текста (49—50).

- 49 а) $\frac{2m}{5} + \frac{3m}{2}$; в) $\frac{x}{ab} - \frac{x}{c}$; д) $\frac{a}{b} + \frac{c}{10}$;
 б) $\frac{2}{a} - \frac{7}{b}$; г) $\frac{c}{ab} + \frac{a}{cd}$; е) $\frac{b}{a^2} - \frac{a}{b^2}$.
- 50 а) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+y}$; в) $\frac{x}{x+y} - \frac{x-y}{x}$; д) $\frac{2c}{c-d} - \frac{c+d}{c}$;
 б) $\frac{5}{a} + \frac{3a-5}{a+1}$; г) $\frac{m+n}{m} - \frac{n+m}{m-n}$; е) $\frac{p}{q-p} - \frac{p}{q}$.

51 Найдите сумму и разность дробей:

- а) $\frac{1}{a-b}$ и $\frac{1}{a+b}$; в) $\frac{p-q}{p+q}$ и $\frac{p+q}{p-q}$;
 б) $\frac{a+1}{a-1}$ и $\frac{a-1}{a+1}$; г) $\frac{m}{m+4}$ и $\frac{m}{m-4}$.

Выполните действия; в качестве образца используйте пример 3 из текста (52—53).

- 52 а) $\frac{n-1}{2n} - \frac{n+1}{5n}$; г) $\frac{1-xz}{xyz} - \frac{1-ax}{axy}$;
 б) $\frac{2}{x} - \frac{1+y}{xy}$; д) $\frac{c+b}{bc^2} - \frac{c+b}{b^2c}$;
 в) $\frac{1}{y^3} + \frac{1-y^2}{y^5}$; е) $\frac{1+b}{abc} + \frac{1-a}{a^2c}$.
- 53 а) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$; в) $\frac{x+y}{xy} - \frac{x+z}{xz} + \frac{y+z}{yz}$;
 б) $\frac{1}{b^3} - \frac{2}{b^2} + \frac{1}{b}$; г) $\frac{3x+1}{3x} - \frac{2y+1}{2y} + \frac{3x-y}{6xy}$.

Упростите выражение (54—56).

- 54 а) $\frac{4b}{3(b+3)} + \frac{4}{b+3}$; в) $\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(a+b)}$;
 б) $\frac{x}{4(x-1)} - \frac{x}{6(x-1)}$; г) $\frac{3x}{y(x+y)} - \frac{3y}{x(x+y)}$.
- 55 а) $\frac{2a}{3a+3} + \frac{5a}{6a+6}$; г) $\frac{4p}{9p+9q} - \frac{p}{3p+3q}$;
 б) $\frac{m}{4m-4} - \frac{m}{12m-12}$; д) $\frac{x}{ax+ay} + \frac{y}{by+bx}$;
 в) $\frac{x}{2x-2y} + \frac{3x}{8x-8y}$; е) $\frac{a}{cb-cd} - \frac{c}{ab-ad}$.

56 а) $\frac{2a}{a^2-b^2} - \frac{2}{a+b}$; г) $\frac{y^2}{y^2-2y+1} - \frac{y}{y-1}$;
 б) $\frac{c^2+25}{c^2-25} - \frac{c}{c+5}$; д) $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$;
 в) $\frac{2}{3a+2} + \frac{8}{9a^2-4}$; е) $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2} - \frac{m-n}{m+n}$.

57 ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ ■ Найдите значение выражения при заданных значениях переменных:

а) $\frac{4}{x} + \frac{20}{x^2-5x}$; $x = -19$;
 б) $\frac{n^2}{mn-m^2} - \frac{m}{n-m}$; $m = -0,5$; $n = 2,5$;
 в) $\frac{a}{a-c} - \frac{2ac-c^2}{a^2-ac}$; $a = -100$; $c = -85$;
 г) $\frac{y^2+4}{y^2-2y} - \frac{2}{y-2}$; $y = \frac{1}{6}$;
 д) $\frac{2}{a^2+ab} + \frac{2}{b^2+ab}$; $a = 0,25$; $b = 4$;
 е) $\frac{1}{xy-x^2} - \frac{1}{y^2-xy}$; $x = -0,17$; $y = 100$.

58 РАЗБИРАЕМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ■ 1) Замените знаменатель одной из дробей противоположным выражением и поменяйте знак перед этой дробью. Упростите получившееся выражение:

а) $\frac{2x}{x-y} + \frac{2y}{y-x}$; в) $\frac{m+n}{m-n} - \frac{n}{n-m}$;
 б) $\frac{a+b}{b-a} + \frac{a+2b}{a-b}$; г) $\frac{a-1}{a-2} - \frac{a+1}{2-a}$.

Образец. а) $\frac{2x}{x-y} + \frac{2y}{y-x} = \frac{2x}{x-y} - \frac{2y}{x-y} = \dots$

Доведите преобразование до конца.

2) Приведите дроби к общему знаменателю, заменив у одной из них числитель и знаменатель на противоположные выражения, а затем выполните действие:

а) $\frac{3b-a}{b-a} + \frac{4b}{a-b}$; в) $\frac{1-x}{x-y} + \frac{1-6x}{y-x}$;
 б) $\frac{2y+x}{x-1} + \frac{x-3y}{1-x}$; г) $\frac{2m}{m-n} + \frac{3n-m}{n-m}$.

Образец. а) $\frac{3b-a}{b-a} + \frac{4b}{a-b} = \frac{a-3b}{a-b} + \frac{4b}{a-b} = \dots$

Доведите преобразование до конца.

59 Упростите выражение:

а) $\frac{b}{b-1} - \frac{b-2}{1-b}$; в) $\frac{2c-5}{a-c} - \frac{c+5}{c-a}$; д) $\frac{m}{m^2-4} - \frac{2}{4-m^2}$;
 б) $\frac{4}{2a-1} + \frac{3-2a}{1-2a}$; г) $\frac{x^2}{x-3} + \frac{9}{3-x}$; е) $\frac{2x-1}{x-y} + \frac{x-1}{y-x}$.

Подсказка. В каждом случае примените один из способов, рассмотренных в упражнении 58, — наиболее удобный для данного случая.

60 ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО а) Два восьмиклассника при выполнении самостоятельной работы получили разные ответы на задание: «Представьте выражение $\frac{a}{b} + a$ в виде дроби». Ответ первого $\frac{2a}{b}$, ответ второго $\frac{a+ab}{b}$. Кто из них прав, а кто ошибся и в чём его ошибка?

б) Учитель предложил представить выражение $\frac{15a^2}{3a-2} - 5a + 1$ в виде дроби и упростить полученную дробь. Четверо учащихся начали преобразование по-разному, и каждый уверял, что он прав. Разберитесь, в каких случаях преобразования верные, а в каких нет. Доведите верные решения до конца.

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{15a^2}{3a-2} - 5a + 1 &= \frac{15a^2}{3a-2} - \frac{5a}{1} + \frac{1}{1} = \\ 2) \quad \frac{15a^2}{3a-2} - 5a + 1 &= \frac{15a^2 - 5a + 1}{3a-2} = \\ 3) \quad \frac{15a^2}{3a-2} - 5a + 1 &= \frac{15a^2}{3a-2} - (5a-1) = \frac{15a^2}{3a-2} - \frac{5a-1}{1} = \\ 4) \quad \frac{15a^2}{3a-2} - 5a + 1 &= \frac{15a^2}{3a-2} - (5a+1) = \frac{15a^2}{3a-2} - \frac{5a+1}{1} = \end{aligned}$$

Представьте выражение в виде дроби; в качестве образца используйте пример 5 из текста (61—62).

61

а) $\frac{a}{b} + a$; в) $y - \frac{4}{y}$; д) $\frac{b}{c} - 2 + \frac{c}{b}$;
 б) $\frac{m}{n} - m$; г) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - 1$; е) $1 - \frac{2}{p} + \frac{1}{p^2}$.

- 62 а) $\frac{5x}{x-y} + 5$; г) $\frac{2c^2}{c-8} - 2c$; ж) $4x - \frac{10x^2-2}{3x}$;
 б) $1 + \frac{a}{b-a}$; д) $\frac{15a^2}{3a-2} - 5a$; з) $2 + \frac{1-ab}{ab}$;
 в) $7 - \frac{7x}{x+y}$; е) $2m - \frac{mn-1}{n}$; и) $\frac{3a+1}{2a+1} - 1$.

63 Упростите выражение:

- а) $\frac{1+x}{1-x} + \frac{1-x}{1+x} - \frac{2x^2}{1-x^2}$; в) $\frac{y-6}{y^2+3y} - \frac{y-3}{y} + \frac{y}{y+3}$;
 б) $\frac{1}{a+b} - \frac{2b}{a^2-b^2} + \frac{1}{a-b}$; г) $\frac{a(4a-b)}{3a-3b} - \frac{a}{3} - \frac{b^2}{a-b}$.

Б

64 ■ РАССУЖДАЕМ ■ а) Найдите дробь, которую надо сложить с дробью $\frac{c-c^2}{c^3+2c}$, чтобы получить $\frac{1}{c^2+2}$. Проверьте результат.

б) Найдите дробь, которую надо сложить с дробью $\frac{3}{x+3}$, чтобы получить $\frac{3x^2}{x^3+27}$.

Упростите выражение (65—68).

- 65 а) $\frac{a}{ax-x^2} - \frac{a}{ax+x^2}$; в) $\frac{m+n}{m^2n-mn^2} - \frac{m-n}{m^2n+mn^2}$;
 б) $\frac{a-b}{a^2+ab} - \frac{a+b}{a^2-ab}$; г) $\frac{x+y}{xy-y^2} - \frac{4x}{x^2-y^2}$.
- 66 а) $\frac{4}{a} + \frac{4}{a^2-a} - \frac{2}{a+1}$; в) $\frac{x+1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}$;
 б) $\frac{x-2}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} + \frac{8}{x}$; г) $\frac{1}{m+n} - \frac{m+n}{m^2-mn+n^2} + \frac{4mn}{m^3+n^3}$.
- 67 а) $\frac{m+n}{m-n} + \frac{4mn}{n^2-m^2}$; г) $\frac{4}{c^2-25} + \frac{2}{5c-c^2}$;
 б) $\frac{1-a}{a^2-a} - \frac{1+a}{1-a^2}$; д) $\frac{x^2}{(x-3)^2} + \frac{x}{3-x}$;
 в) $\frac{b}{ab-a^2} + \frac{a}{ab-b^2}$; е) $\frac{y^2}{(1-y)^2} - \frac{y+1}{y-1}$.

68 а) $\frac{a}{a-b} + \frac{a^2+b^2}{b^2-a^2} + \frac{a}{a+b}$; в) $\frac{a}{4-a^2} - \frac{2+a}{2a-4} - \frac{2-a}{4+2a}$;
 б) $\frac{1}{x+y} - \frac{1}{y-x} - \frac{2y}{x^2-y^2}$; г) $\frac{x+1}{(x-1)^2} + \frac{2}{1-x^2} - \frac{1}{x+1}$.

69 Представьте в виде дроби:

а) $2x - y - \frac{2x-y^2}{y}$; г) $6 + b - \frac{12b}{6+b}$;
 б) $1 - a + \frac{a^2-3}{3+a}$; д) $\frac{x^2+4}{x-2} - x - 2$;
 в) $\frac{a^2+b^2}{2a+b} + 2a - b$; е) $\frac{a^2-3}{a-1} - a + 1$.

70 ■ РАЗБИРАЕМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ■ Представьте дробь в виде суммы или в виде разности многочлена и дроби:

а) $\frac{a^2}{a-1}$; б) $\frac{c^2}{c^2-1}$; в) $\frac{m^2+n^2}{m-n}$; г) $\frac{x^2+xz+z^2}{x+z}$.

Образец. $\frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2-1+1}{x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = x-1 + \frac{1}{x+1}$.

71 ■ ДОКАЗЫВАЕМ ■ Докажите, что:

а) $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0$;
 б) $\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+2)(a+3)} = \frac{3}{a(a+3)}$.

Подсказка. б) Сначала сложите первую и вторую дроби, затем прибавьте третью.

72 ■ ИССЛЕДУЕМ ■

1) Проверьте равенства:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 3}; \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3 \cdot 4}; \quad \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{4 \cdot 5}; \quad \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{5 \cdot 6}.$$

Продолжите эту цепочку равенств. Запишите соответствующее буквенное равенство и докажите его.

2) Примените доказанное равенство для упрощения выражений:

а) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$;
 б) $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \dots + \frac{1}{(x+99)(x+100)}$.

3) Упростите эти выражения другим способом, последовательно складывая дроби. Получился ли тот же результат?

1.4 Умножение и деление алгебраических дробей

- 1 Вспомните, как умножают и делят обыкновенные дроби. Для этого рассмотрите примеры:

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 5} = \frac{6}{35}; \quad \frac{4}{9} : \frac{5}{7} = \frac{4}{9} \cdot \frac{7}{5} = \frac{4 \cdot 7}{9 \cdot 5} = \frac{28}{45}.$$

Обратите внимание: деление сводится к умножению на дробь, обратную делителю.

Таким же образом умножают и делят алгебраические дроби.

Чтобы умножить дробь на дробь, нужно перемножить их числители и их знаменатели и первое произведение записать в числителе дроби, а второе — в знаменателе.

Чтобы разделить дробь на дробь, нужно делимое умножить на дробь, обратную делителю.

С помощью букв правила умножения и деления алгебраических дробей записываются так:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}, \quad \frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}.$$

- Пример 1. Найдём произведение и частное дробей $\frac{2}{3x^2y}$ и $\frac{3x}{4y}$.

$$\frac{2}{3x^2y} \cdot \frac{3x}{4y} = \frac{2 \cdot 3x}{3x^2y \cdot 4y} = \frac{1}{2xy^2};$$

$$\frac{2}{3x^2y} : \frac{3x}{4y} = \frac{2}{3x^2y} \cdot \frac{4y}{3x} = \frac{2 \cdot 4y}{3x^2y \cdot 3x} = \frac{8}{9x^3}.$$

- Пример 2. Преобразуем в дробь произведение $\frac{2x^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{x+y}{x}$.

$$\frac{2x^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{x+y}{x} = \frac{2x^2 \cdot (x+y)}{(x+y)(x-y) \cdot x} = \frac{2x}{x-y}.$$

- Пример 3. Преобразуем в дробь частное $\frac{x^2-xy}{y} : \frac{x-y}{y^2}$.

$$\frac{x^2-xy}{y} : \frac{x-y}{y^2} = \frac{x^2-xy}{y} \cdot \frac{y^2}{x-y} = \frac{x(x-y) \cdot y^2}{y \cdot (x-y)} = xy.$$

- 2 Пример 4. Выполним умножение дроби $\frac{ab}{2d}$ на одночлен $4bd$.

Запишем одночлен в виде дроби со знаменателем, равным 1, а затем воспользуемся правилом умножения дробей:

$$\frac{ab}{2d} \cdot 4bd = \frac{ab}{2d} \cdot \frac{4bd}{1} = \frac{ab \cdot 4bd}{2d \cdot 1} = 2ab^2.$$

Пример 5. Разделим дробь $\frac{5a^2b}{6}$ на одночлен $10abc$.

Как и в предыдущем примере, представим одночлен в виде дроби со знаменателем, равным 1, а затем воспользуемся правилом деления дробей:

$$\frac{5a^2b}{6} : 10abc = \frac{5a^2b}{6} : \frac{10abc}{1} = \frac{5a^2b}{6} \cdot \frac{1}{10abc} = \frac{5a^2b \cdot 1}{6 \cdot 10abc} = \frac{a}{12c}.$$

- Сформулируйте правила умножения и деления обыкновенных дробей и выполните действия: $\frac{12}{25} \cdot \frac{5}{6}$; $\frac{8}{9} : \frac{4}{15}$; $2 : \frac{10}{7}$.
- Сформулируйте правила умножения и деления алгебраических дробей и выполните: умножение дробей $\frac{2}{x}$ и $\frac{3}{y}$; деление дроби $\frac{2}{x}$ на дробь $\frac{3}{y}$.
- Объясните, как применить правило умножения дробей к преобразованию произведения $\frac{bc}{2a} \cdot 6ac$. Найдите это произведение. Найдите частное $\frac{bc}{2a} : 6ac$, прокомментируйте свои действия.

А

ДЕЙСТВУЕМ ПО ПРАВИЛУ (73–75)

73 Выполните умножение:

а) $\frac{a}{5} \cdot \frac{b}{2}$; б) $\frac{m}{3} \cdot \frac{m}{3}$; в) $\frac{2a^2}{x} \cdot \frac{a^2}{x}$; г) $\frac{1}{a-1} \cdot \frac{2}{a-1}$.

74 Выполните деление:

а) $\frac{1}{a} : \frac{1}{d}$; в) $\frac{n+3}{2} : \frac{1}{n+3}$;
 б) $\frac{n}{m^2} : \frac{m}{n}$; г) $\frac{1}{b+5} : \frac{b-5}{b}$.

75 Выполните действия:

а) $\frac{a}{bc} \cdot \frac{c^3}{3a}$; в) $\frac{x}{yz} \cdot \frac{y}{xz}$; д) $\frac{a^4b^2}{5xy} \cdot \frac{10x^3}{a^2b^2}$;
 б) $\frac{x^2}{y} : \frac{x}{2y}$; г) $\frac{a^4}{b^3} : \frac{a^3}{b^2}$; е) $\frac{3mn}{2pq^2} : \frac{6m^2}{pq}$.

76 Как возвести в степень дробь? Выполните возведение в степень:

$$\begin{array}{llll} \text{а)} \left(\frac{x^2}{y}\right)^3; & \text{в)} \left(\frac{a^2b}{cd^2}\right)^4; & \text{д)} \left(-\frac{2a^2}{b}\right)^2; & \text{ж)} \left(-\frac{ax^3}{y^2}\right)^2; \\ \text{б)} \left(\frac{4}{bc^3}\right)^2; & \text{г)} \left(\frac{mn}{10p^3}\right)^3; & \text{е)} \left(-\frac{x^4}{2y}\right)^3; & \text{з)} \left(-\frac{2}{m^2n}\right)^5. \end{array}$$

77 Выполните умножение:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \frac{y}{x} \cdot \frac{x^2 - xy}{y^2}; & \text{в)} \frac{x}{5x + 5y} \cdot \frac{x + y}{y}; & \text{д)} \frac{a + 1}{a} \cdot \frac{b}{a^2 + a}; \\ \text{б)} \frac{b^2}{2a} \cdot \frac{6a}{ab - b^2}; & \text{г)} \frac{a^2 - ab}{b} \cdot \frac{a}{a - b}; & \text{е)} \frac{ac - cd}{ad} \cdot \frac{d}{c^2}. \end{array}$$

78 Выполните деление:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \frac{ax - xy}{a} : \frac{a^2 - ay}{x}; & \text{г)} \frac{1}{a^2 - ab} : \frac{b}{a^2 - b^2}; \\ \text{б)} \frac{ab + ac}{bc} : \frac{ab - ac}{bc}; & \text{д)} \frac{a^2 + ab}{b^2} : \frac{a^2 + a}{b}; \\ \text{в)} \frac{x}{x^2 - y^2} : \frac{1}{5x + 5y}; & \text{е)} \frac{m^2 - mn}{n} : \frac{mn - n^2}{m}. \end{array}$$

79 Выполните действия:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \frac{ac - cd}{ad} \cdot \frac{cd}{a^2 - ad}; & \text{д)} \frac{b}{c^2 - bc} : \frac{b^3}{c^2 - b^2}; \\ \text{б)} \frac{x^2 - 2x}{y^2} : \frac{x^2y - 2xy}{4}; & \text{е)} \frac{m^2 - n^2}{2mn^2} \cdot \frac{2mn}{3m - 3n}; \\ \text{в)} \frac{x^2 - y^2}{x^2} : \frac{3x + 3y}{x}; & \text{ж)} \frac{a^2b}{a^2 - 2ab + b^2} : \frac{a}{ab - b^2}; \\ \text{г)} \frac{xy + x^2}{8y} \cdot \frac{2x}{xy + y^2}; & \text{з)} \frac{p^2 + 2pq + q^2}{2p} \cdot \frac{2p}{p^2 - q^2}. \end{array}$$

80 ■ РАЗБИРАЕМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ■ Упростите выражение:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \frac{5x - 5y}{x} \cdot \frac{2x^2}{y - x}; & \text{г)} \frac{(x - y)^2}{y^2} \cdot \frac{y^2}{y^2 - x^2}; \\ \text{б)} \frac{a^2 - c^2}{c^2} : \frac{c - a}{c}; & \text{д)} \frac{2a^2}{25 - 5a} : \frac{10a}{(a - 5)^2}; \\ \text{в)} \frac{a}{ab - b^2} : \frac{a^2}{b^2 - a^2}; & \text{е)} \frac{m}{3m - 3n} \cdot \frac{n^2 - m^2}{m^2}. \end{array}$$

Образец. $\frac{x - y}{a} : \frac{y - x}{b} = \frac{x - y}{a} \cdot \frac{b}{y - x} = -\frac{(x - y)b}{a(x - y)} = -\frac{b}{a}.$

81 Найдите произведение дроби и одночлена (пример 4 из текста):

а) $a \cdot \frac{1}{b}$; в) $\frac{a}{2x} \cdot 2a$; д) $\frac{ab}{cd} \cdot bc$;
 б) $\frac{3}{x} \cdot y$; г) $8x \cdot \frac{c}{4x}$; е) $axy \cdot \frac{a}{xy}$.

82 Найдите частное (пример 5 из текста):

а) $\frac{1}{x} : y$; в) $3a : \frac{9}{a}$; д) $\frac{ab}{cd} : (bc)$;
 б) $m : \frac{1}{n}$; г) $\frac{2ab}{3} : (6b)$; е) $mpq : \frac{m}{pq}$.

Выполните умножение или деление (**83—84**).

83 а) $2x^2y \cdot \frac{x}{y}$; в) $\frac{3a}{4b^2} \cdot 8a^2b^2$; д) $\frac{2a^2}{3b^3} : (6ab)$;
 б) $5ab^2 : \frac{a}{b}$; г) $\frac{12m^2}{n^2} : (6m^2n^2)$; е) $18pq^2 \cdot \frac{2p}{9q^6}$.

84 а) $\frac{x-y}{x} \cdot (x+y)$; д) $\frac{n^2-4}{3} : (n-2)^2$;
 б) $(2a+6) \cdot \frac{a-2}{a+3}$; е) $(x-z) : \frac{x^2-2xz+z^2}{x^2-z^2}$;
 в) $\frac{4a^2}{2a-b} \cdot (2a-b)$; ж) $\frac{p^2+4p+4}{p-2} : (p^2-4)$;
 г) $(2m-3) \cdot \frac{m-1}{2m-3}$; з) $\frac{b}{a^2-ab} : (ab-b^2)$.

Б

85 Упростите выражение:

а) $\frac{2x^2y}{a^2} \cdot \frac{a}{xy^2} : \frac{2x^2}{a^3y}$; в) $x^3y^2 : \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{y^3}$; д) $3xy^2 \cdot \frac{x}{y} : \frac{6x^2}{y}$;
 б) $\left(\frac{ab^3}{x} : \frac{5b^2}{a}\right) : \frac{a^3}{2x}$; г) $\frac{2ab^5}{3c} \cdot 6ac : (2b^3c)$; е) $\frac{3m^2}{2n^2} \cdot \frac{10n}{3m} : (15mn)$.

Выполните действия (**86—89**).

86 а) $\frac{x^2-9}{x^2-5x} \cdot \frac{x^2-25}{x^2+3x}$; в) $\frac{4x-y}{x^2+xy} : \frac{4x^2-xy}{2x^2-2y^2}$;
 б) $\frac{b^2-ab}{a^2+ad} : \frac{ab}{d^2+ad}$; г) $\frac{a^2+4a+4}{2a-2} \cdot \frac{a^2-a}{3a+6}$;
87 а) $\frac{(c-d)^2}{cd^2+d^3} : \frac{d^2-c^2}{d^4}$; в) $\frac{2z-2y}{(2z+2y)^2} \cdot \frac{(2y+2z)^3}{(2y-2z)^3}$;
 б) $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} \cdot \frac{(b-a)^3}{3(a+b)^3}$; г) $\frac{(x-2)^2}{(x-1)^2} : \frac{(4-2x)^3}{(3-3x)^2}$.

- 88 а) $\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3} \cdot \frac{y-x}{y+x}$; в) $\frac{p^3-q^3}{p^4-q^4} \cdot \frac{p^2+q^2}{p-q}$;
 б) $\frac{2x^3+2z^3}{xz-x^2} : \frac{x^3-x^2z+xz^2}{x^2-z^2}$; г) $\frac{x^4-16}{x^2-4x+4} : \frac{x^3+8}{x-2}$;
 89 а) $\frac{n-n^2}{2+n} \cdot \frac{1}{2n-n^2} \cdot \frac{n^2-4}{n-1}$; б) $\frac{x^2-y^2}{x^2+xy+y^2} : \frac{x+y}{x^3-y^3} \cdot \frac{1}{(y-x)^3}$.

90 ■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ ■ Найдите с помощью калькулятора значение выражения:

- а) $\frac{x+y}{xy}$ при $x=1,25$ и $y=1,6$; при $x=0,032$ и $y=0,04$;
 б) $\frac{2x-y}{5y}$ при $x=10,24$ и $y=0,25$; при $x=5,12$ и $y=0,5$;
 в) $\frac{x^2+xy}{y^2}$ при $x=0,9$ и $y=7,5$; при $x=10,8$ и $y=0,45$.

Указание. а) Чтобы выполнять вычисления непрерывной цепочкой, преобразуем выражение $\frac{x+y}{xy}$ следующим образом:

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{x+y}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{x+y}{x} : y.$$

1.5 Преобразование выражений, содержащих алгебраические дроби

Вы рассмотрели правила, по которым складывают, вычитают, умножают и делят две алгебраические дроби, т. е. преобразовывают в дробь их сумму, разность, произведение и частное. Пользуясь этими правилами, можно преобразовывать и более сложные выражения, содержащие алгебраические дроби.

Пример 1. Упростим выражение

$$\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} : \left(\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b} \right).$$

Преобразование этого выражения удобно выполнять по действиям:

- 1) $\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b} = \frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{a^2+ab-ab+b^2}{(a-b)(a+b)} = \frac{a^2+b^2}{(a-b)(a+b)}$;
 2) $\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} : \frac{a^2+b^2}{(a-b)(a+b)} = \frac{(a^2+b^2) \cdot (a-b) \cdot (a+b)}{(a+b)^2 \cdot (a^2+b^2)} = \frac{a-b}{a+b}.$

Таким образом, данное выражение равно дроби $\frac{a-b}{a+b}$.

Пример 2. Упростим выражение

$$\left(\frac{a}{a^2-b^2} - \frac{a}{a^2+b^2} \right) \cdot (a^4-b^4).$$

Здесь, как и в предыдущем примере, можно сначала преобразовать выражение в скобках, а затем умножить результат на двучлен a^4-b^4 . Но можно действовать и иначе. Двучлен a^4-b^4 делится на знаменатель каждой из дробей, составляющих разность в скобках. Поэтому целесообразно сначала раскрыть скобки, выполнив умножение на этот двучлен:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{a^2-b^2} - \frac{a}{a^2+b^2} \right) \cdot (a^4-b^4) &= \frac{a(a^4-b^4)}{a^2-b^2} - \frac{a(a^4-b^4)}{a^2+b^2} = \\ &= a(a^2+b^2) - a(a^2-b^2) = a(a^2+b^2-a^2+b^2) = 2ab^2. \end{aligned}$$

2 **Пример 3.** Докажем, что выражение

$$(c^3-1) : \left(\frac{c^2}{c+1} + 1 \right) + 5$$

может принимать только положительные значения.

Прежде всего упростим данное выражение, выполнив указанные действия:

$$1) \frac{c^2}{c+1} + 1 = \frac{c^2+c+1}{c+1};$$

$$2) (c^3-1) : \frac{c^2+c+1}{c+1} = \frac{(c-1)(c^2+c+1)(c+1)}{c^2+c+1} = c^2-1;$$

$$3) (c^2-1) + 5 = c^2+4.$$

Таким образом, мы преобразовали данное выражение в двучлен c^2+4 . Но этот двучлен принимает только положительные значения. Значит, и равное ему исходное выражение при всех допустимых значениях переменной c может принимать только положительные значения.

□ Выполните преобразование выражения $\left(\frac{m-n}{n} - \frac{m-n}{m} \right) : \frac{m-n}{mn}$ сначала по действиям, как сделано в примере 1, а затем способом, который применён в примере 2.

□ В результате преобразования выражения в примере 3 получен двучлен c^2+4 . Объясните, почему этот двучлен при любых значениях c положителен.

Упростите выражение (91—94).

- 91 а) $\frac{xy}{x-y} \cdot \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right)$; г) $\left(\frac{u}{u-v} - \frac{u}{u+v}\right) \cdot \frac{u^2+uv}{2v}$;
 б) $\frac{mn^2}{n^2-m^2} \cdot \left(\frac{2}{m} - \frac{2}{n}\right)$; д) $\left(\frac{c-d}{d} + \frac{2c}{c-d}\right) : \frac{c^2+d^2}{c-d}$;
 в) $\left(a - \frac{6a-4}{a+2}\right) \cdot \frac{a+2}{a^2-2a}$; е) $\left(\frac{a+b}{a} - \frac{a+b}{b}\right) : \frac{a+b}{a^2b^2}$.
- 92 а) $\left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right) : (a+b)$; в) $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right) : (x-y)$;
 б) $(x^2-y^2) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$; г) $(a+b)^2 : \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{ab}\right)$.
- 93 а) $\frac{a}{1-b} + \frac{a^2-ab}{b^2-1} \cdot \frac{b+1}{a}$; в) $n - \frac{n^2-na}{n+a} \cdot \frac{n}{n-a}$;
 б) $\frac{m^2-9}{m} : \frac{(m-3)^2}{m} + \frac{6}{3-m}$; г) $\frac{v+3}{1-v} + \frac{v+3}{v-1} \cdot (v+1)$.
- 94 а) $\left(1 - \frac{u}{u+v}\right) \cdot \left(1 + \frac{v}{u-v}\right)$; в) $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)$;
 б) $\left(\frac{1}{x+z} - \frac{1}{x-z}\right) : \left(\frac{1}{x+z} + \frac{1}{x-z}\right)$; г) $\left(\frac{1}{y} - y\right) \cdot \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y-1}\right)$.

95 Выполните возведение в квадрат:

- а) $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2$; в) $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2$;
 б) $\left(n - \frac{1}{n}\right)^2$; г) $\left(\frac{1}{2x} - x\right)^2$.

Подсказка. Можно воспользоваться формулами $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Для этого в каждом случае определите, какое выражение надо подставить в формулу вместо a и какое — вместо b , и примените формулу.

96 Упростите выражение:

- а) $\left(c + \frac{1}{c}\right)^2 - 2$; в) $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right)$;
 б) $\left(m - \frac{2}{m}\right)^2 - \left(m + \frac{2}{m}\right)^2$; г) $\left(a + \frac{a+1}{a}\right)^2 - \left(a - \frac{a+1}{a}\right)^2$.

97 РАЗБИРАЕМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{3}}; & \text{в) } \frac{\frac{1-x}{y}}{\frac{1}{y} + x}; & \text{д) } \frac{\frac{1-b}{a}}{\frac{1}{b} - a}; \\ \text{б) } \frac{3 + \frac{p}{q}}{3 - \frac{p}{q}}; & \text{г) } \frac{\frac{x-y}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}; & \text{е) } \frac{\frac{u-3}{1}}{\frac{1}{v} - \frac{3}{uv}}. \end{array}$$

Образец. $\frac{\frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + 1} = \frac{\left(\frac{a}{b} + 1\right)ab}{\left(\frac{b}{a} + 1\right)ab} = \frac{a^2 + ab}{b^2 + ab} = \frac{a(a+b)}{b(a+b)} = \frac{a}{b}.$

98 Выразите из формулы каждую переменную через остальные переменные:

$$\text{а) } \frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}; \quad \text{б) } \frac{1}{D} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}.$$

Б

Упростите выражение (99—100).

$$\begin{array}{l} 99 \quad \text{а) } \left(\frac{x}{x+1} + \frac{x^2+1}{1-x^2} - \frac{x}{x-1} \right) : \frac{x+x^2}{(1-x)^2}; \\ \quad \text{б) } \frac{(a-5)^2}{a^2+5a} : \left(\frac{5}{a+5} - \frac{a^2+25}{a^2-25} - \frac{5}{5-a} \right); \\ \quad \text{в) } \left(\frac{1+x}{x^2-xy} - \frac{1-y}{y^2-xy} \right) : \frac{x^2+y^2+2xy}{x^2y-xy^2} - \frac{x}{x^2-y^2}; \\ \quad \text{г) } \frac{4}{b^2-4} + \frac{4b}{4-4b+b^2} \cdot \left(\frac{2}{2b+b^2} - \frac{b}{4+2b} \right). \\ 100 \quad \text{а) } \left(m+3 + \frac{9}{m-3} \right) : \left(\frac{m}{m-3} + \frac{3m}{(3-m)^2} \right); \\ \quad \text{б) } \left(\frac{n}{1+2n+n^2} - \frac{n}{n+1} \right) : \left(\frac{1}{n+1} + n-1 \right); \\ \quad \text{в) } \left(\frac{x^3}{y^3} + 1 \right) : \left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right); \\ \quad \text{г) } \left(1 + \frac{v}{u} + \frac{v^2}{u^2} \right) : \left(\frac{1}{v} - \frac{v^2}{u^3} \right). \end{array}$$

ДОКАЗЫВАЕМ (101–102)

101 Докажите, что значение выражения не зависит от значений переменных:

а) $\frac{16b^2 - a^2}{4b} \cdot \left(\frac{a+4b}{a^2-4ab} - \frac{a-4b}{a^2+4ab} \right);$

б) $\frac{3y}{9y^2 - x^2} : \left(\frac{x-3y}{x^2+3xy} + \frac{x+3y}{3xy-x^2} \right).$

102 Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значения выражения:

а) $\left(\frac{b^2}{a^3 - ab^2} - \frac{b}{a^2 - ab} \right) \cdot \left(\frac{a}{b^2 + ab} - \frac{1}{a+b} \right)$ отрицательны;

б) $\frac{x^3 - y^3}{2x + 2y} \cdot \frac{(x+y)^2}{x^2 + xy + y^2} : \left(\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} \right)$ неотрицательны.

103 Упростите выражение:

а) $\left(1 - z - \frac{2z}{z-1} \right) : \left(\frac{1}{z} + z \right) \cdot \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^3} \right);$

б) $\left(a - 5 + \frac{a^2 + 7}{a+5} \right) \cdot \left(\frac{a}{a-3} - \frac{a}{a+3} \right) : \frac{6a}{25 - a^2};$

в) $\frac{a^3 - b^3}{2a + 2b} \cdot \left(\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} \right) : \frac{a^2 + ab + b^2}{(a+b)^2};$

г) $\frac{1}{x+y} + \frac{x^2 + y^2 - xy}{y^2 - x^2} \cdot \frac{xy - y^2}{x^3 + y^3} - \frac{1}{(x+y)^2}.$

104 РАЗБИРАЕМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ

а) Дано: $x + \frac{1}{x} = y$. Выразите $x^2 + \frac{1}{x^2}$ через y .

б) Дано: $x - \frac{1}{x} = y$. Выразите $x^2 + \frac{1}{x^2}$ через y .

Образец. Дано: $x + \frac{2}{x} = y$. Выразим $x^2 + \frac{4}{x^2}$ через y :

$$\left(x + \frac{2}{x} \right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} = x^2 + 4 + \frac{4}{x^2}.$$

Отсюда $x^2 + \frac{4}{x^2} = \left(x + \frac{2}{x} \right)^2 - 4 = y^2 - 4.$

105 ■ ИССЛЕДУЕМ ■ 1) Проверьте равенства:

а) $\frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$; в) $\frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$;

б) $\frac{1}{4 \cdot 6} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)$; г) $\frac{1}{5 \cdot 7} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right)$.

Составьте ещё несколько таких же равенств. Запишите соответствующее буквенное равенство и докажите его.

2) Примените доказанное равенство для упрощения выражений:

а) $\frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{23 \cdot 25}$;

б) $\frac{1}{a(a+2)} + \frac{1}{(a+2)(a+4)} + \dots + \frac{1}{(a+98)(a+100)}$.

Упростите эти выражения другим способом, последовательно складывая дроби. Совпали ли ваши результаты?

1.6 Степень с целым показателем

1 В 7 классе в курсе алгебры и при изучении физики вам уже встречались степени с отрицательными показателями, например такие выражения, как 10^{-5} , 3^{-6} , $(0,5)^{-8}$. И вы знаете, что выражение 10^{-5} означает дробь $\frac{1}{10^5}$. Точно так же $3^{-6} = \frac{1}{3^6}$, $(0,5)^{-8} = \frac{1}{(0,5)^8}$.

В общем случае принимается следующее

Определение

Для любого числа a , не равного нулю, и целого отрицательного числа $-n$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Например, по определению

$$(-4)^{-2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16}, \quad \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{125}} = 125.$$

Обратите внимание: равенство $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ означает, что числа a^{-n} и a^n — взаимно обратные; их произведение равно 1. В частности, a^{-1} есть число, обратное числу a .

- Запишите число, обратное данному, с помощью показателя -1 и найдите это число: 8 ; $\left(\frac{2}{5}\right)$; -3 . Найдите произведение: $8 \cdot 8^{-1} : \left(\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$; $(-3) \cdot (-3)^{-1}$.
- Сформулируйте определение степени с нулевым показателем. Чему равно 100^0 ?
- Представьте в десятичной записи число, записанное в стандартном виде: $5,9 \cdot 10^{-5}$; $9,1 \cdot 10^9$.

А

ДЕЙСТВУЕМ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ (106–108)

106 Замените выражение равным, не содержащим отрицательных показателей:

- а) a^{-3} ; в) xy^{-1} ; д) $a^{-2} + b^{-2}$; ж) $-10yz^{-19}$;
 б) $(5x)^{-2}$; г) $3m^2n^{-2}$; е) $(u-v)^{-2}$; з) $2(a+c)^{-3}$.

107 Вычислите:

- а) 3^{-3} ; 2^{-4} ; 11^{-2} ; в) 1^{-25} ; $(-1)^{-17}$; $(-1)^{-20}$;
 б) $(-9)^{-2}$; $(-5)^{-3}$; $(-2)^{-6}$; г) 15^0 ; $(-12)^0$; $(-1)^0$.

108 Найдите значение выражения:

- а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$; в) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}$; д) $(-1,5)^{-2}$;
 б) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$; г) $(-0,3)^{-3}$; е) $\left(-\frac{8}{7}\right)^0$.

109 Какое выражение равно 2^{-n} ?

- 1) -2^n 2) $\frac{1}{2^{-n}}$ 3) $\frac{1}{2^n}$ 4) $-\frac{1}{2^n}$

РАССУЖДАЕМ (110–111)

110 Сравните с нулём значения выражений m^{16} , m^{-16} , m^{23} и m^{-23} , если: а) $m > 0$; б) $m < 0$. Сделайте вывод.

Подсказка. Проведите числовой эксперимент.

111 Сравните числа a и a^{-1} , если:

- а) $0 < a < 1$; в) $-1 < a < 0$;
 б) $a > 1$; г) $a < -1$.

112 Представьте в виде степени числа 10 следующие числа: 100; 10; 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00001; 0,000001.

113 Запишите число в виде суммы разрядных слагаемых (воспользуйтесь результатами упражнения 112):

- а) 17,214; в) 0,3214; д) 0,03718;
 б) 426,503; г) 0,15268; е) 0,002051.

Образец. $523,48 = 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2}$.

- 114** Число представлено в виде суммы разрядных слагаемых. Запишите это число в десятичной форме:

- а) $2 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$;
 б) $7 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3}$;
 в) $5 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-4}$;
 г) $4 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$.

АНАЛИЗИРУЕМ И РАССУЖДАЕМ (115–116)

- 115** Представьте члены последовательности в виде степеней с одним и тем же натуральным основанием. Запишите три следующих члена последовательности. Какое число будет стоять в этой последовательности на 100-м месте? на месте с номером n ?

- а) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$; в) $\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \dots$;
 б) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots$; г) $3; 1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \dots$.

- 116** Заполните таблицу. Как при заполнении второй строки можно использовать результаты первой?

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
2^x													
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$													

- 117** Представьте дробь в виде произведения:

- а) $\frac{a}{b^2}$; в) $\frac{1}{xz^3}$; д) $\frac{m^{-2}}{na^4}$; ж) $\frac{5}{y^n}$;
 б) $\frac{x}{y}$; г) $\frac{2}{3c^2}$; е) $\frac{pq^2}{m+n}$; з) $\frac{a^k}{n^l}$.

- 118** **ДОКАЗЫВАЕМ** Докажите, что:

- а) $\frac{1}{2^{-3}} = 2^3$; б) $\frac{1}{a^{-4}} = a^4$; в) $\frac{a}{b^{-2}} = ab^2$.

- 119** Запишите выражение, равное данному и не содержащее отрицательных показателей:

- а) $\frac{2}{3^{-17}}$; в) $\frac{m}{np^{-2}}$; д) $\frac{xy}{z^{-1}}$;
 б) $\frac{a^{-2}}{b^{-3}}$; г) $\frac{ab}{(a+b)^{-2}}$; е) $\frac{z}{x^n y^{-k}}$.

120 Найдите значение выражения:

а) $\frac{2^{-3} \cdot 3}{4^{-1}}$; б) $\frac{5^2 \cdot 10^{-2}}{2^{-3}}$; в) $\frac{8^{-1}}{6^2 \cdot 4^{-3}}$; г) $\frac{8^{-2} \cdot 9^{-1}}{12^{-2}}$.

РАБОТАЕМ С СИМВОЛАМИ (121–122)

121 Запишите с помощью отрицательного показателя степени число, обратное данному:

Число	253	0,7	$\frac{4}{5}$	10^6	$2,1^{12}$
Обратное число					

122 Запишите без отрицательного показателя степени число, равное:

а) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$; в) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$; г) $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{-1}$.

Представьте величины в десятичной записи (123–124).

- 123** а) Длина экватора Земли равна $4 \cdot 10^4$ км.
 б) Территория России составляет $1,27 \cdot 10^7$ км².
 в) По данным ООН, численность населения Европы в 2006 г. составила примерно $7,28 \cdot 10^8$ человек, а Азии — $3,9 \cdot 10^9$ человек.

- 124** а) Оптический микроскоп даёт возможность различать объекты размерами до $2,5 \cdot 10^{-3}$ см.
 б) Диаметр молекулы воды равен $2,8 \cdot 10^{-7}$ мм.
 в) Радиус атома водорода равен $4,6 \cdot 10^{-8}$ мм.



Запишите в стандартном виде число (125–126).

- 125** а) 98 000; б) 4 020 000; в) 14,8;
 б) 156 000; г) 23 000 000 000; е) 506,37.
 Образец. $54\,300 = 5,4300 \cdot 10\,000 = 5,43 \cdot 10^4$.

- 126** а) 0,0081; б) 0,0000033; в) 0,000000028;
 б) 0,00153; г) 0,000000415; е) 0,000403.
 Образец. $0,045 = 4,5 : 100 = 4,5 \cdot 0,01 = 4,5 \cdot 10^{-2}$.

127 1) Если число записано в стандартном виде $a \cdot 10^n$, то показатель степени n называют *порядком* числа.

Как вы понимаете выражение «одно число на порядок больше другого»? Приведите примеры.

2) Определите порядок числа:

- а) 25 670; б) 3 400 000; в) $560 \cdot 10^7$; г) $751 \cdot 10^6$.

128 Дополните запись, воспользовавшись образцом:

- а) 38 тыс. км = ... км; г) 19,8 тыс. т = ... т;
 б) 2167 тыс. т = ... т; д) 50,2 млн человек = ... человек;
 в) 11 850 млн р. = ... р.; е) 0,7 млн га = ... га.

Образец. 683 млн книг = $683 \cdot 10^6$ книг = $6,83 \cdot 10^8$ книг.

129 а) За первые два месяца наступившего года в мире было продано примерно $1,02 \cdot 10^7$ компьютеров. Выразите это число в миллионах штук.

б) Территория Антарктиды составляет $1,398 \cdot 10^7$ км². Сколько это тысяч квадратных километров?

ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ (130–132)

130 В таблице приведены расстояния от планет Солнечной системы до Солнца:

Планета	Расстояние, км
Венера	$1,082 \cdot 10^8$
Земля	$1,495 \cdot 10^8$
Марс	$2,280 \cdot 10^8$
Меркурий	$5,790 \cdot 10^7$
Нептун	$4,497 \cdot 10^9$
Сатурн	$1,427 \cdot 10^9$
Уран	$2,871 \cdot 10^9$
Юпитер	$7,781 \cdot 10^8$

1) Какая из планет ближе всех к Солнцу? Какая из них дальше всех от Солнца?

2) Составьте новую таблицу, поместив в левом столбце названия планет в порядке удаления их от Солнца, а в правом — расстояния до Солнца (в млн км).

3) Покажите на схеме (рис. 1.5) примерное положение каждой планеты.

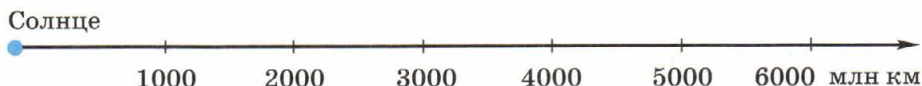


Рис. 1.5

- 131** В прошлом году в России было отправлено $9,2 \cdot 10^7$ телеграмм, из них 0,5 % — международные. Сколько международных телеграмм было отправлено в прошлом году?
- 132** При решении задачи считайте, что численность населения России примерно равна 140 млн человек (в вычислениях используйте калькулятор).
- а) За год в России было выпито 12 млрд чашек чая «Новый». Сколько это в среднем на человека?
- б) В прошлом году в России было издано 1,3 млрд экземпляров книг. Сколько книг издано в среднем на одного человека?
- в) Территория России составляет $1,7 \cdot 10^7$ км². Определите плотность населения в России (среднее число жителей на 1 км²).

Б

- 133** При каких значениях m верно равенство:

а) $5^m = 625$; б) $2^m = \frac{1}{32}$; в) $3^{-m} = 27$; г) $\frac{1}{10^m} = 10\,000$?

- 134** ■ **ДОКАЗЫВАЕМ** ■ Докажите, что:

а) $\left(\frac{8}{9}\right)^{-5} = \left(\frac{9}{8}\right)^5$; б) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-10} = \left(\frac{4}{3}\right)^{10}$; в) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

- 135** Вычислите, пользуясь доказанным в предыдущем упражнении свойством:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$; в) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}$; д) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$; ж) $0,1^{-3}$;
 б) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$; г) $\left(\frac{7}{8}\right)^{-2}$; е) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3}$; з) $0,5^{-2}$.

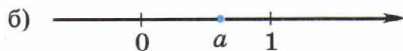
- 136** Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$; $\frac{2}{3}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^0$;
 б) $(2,5)^{-3}$; 2,5; $(2,5)^{-5}$; $2,5^0$.

- 137** Расположите в порядке убывания числа:

а) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-5}$; $\left(\frac{4}{9}\right)^{-6}$; $\frac{4}{9}$; $\left(\frac{4}{9}\right)^0$;
 б) $(0,8)^{-8}$; $(0,8)^0$; 0,8; $(0,8)^{-6}$.

- 138** ■ **РАССУЖДАЕМ** ■ Сравните числа a^{-2} и a^{-3} (рис. 1.6, а, б).



■ Рис. 1.6

- 139** Найдите значение каждого из выражений x , $(x + 1)^{-1}$ и $(2x)^{-1}$, если известно, что:
 а) $x^{-1} = 10$; б) $x^{-1} = 0,1$; в) $x^{-1} = 1$.

■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ (140–144) ■ При решении задач используйте калькулятор.

- 140** Считая, что средний радиус Земли равен $6,37 \cdot 10^3$ км, найдите:
 а) площадь поверхности Земли, выразив её в млн км²;
 б) объём земного шара, выразив его в млрд км³.

Указание. Воспользуйтесь формулами площади поверхности сферы $S = 4\pi R^2$ и объёма шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R — радиус шара и $\pi \approx 3,14$.

- 141** Расстояние от Солнца до Земли принимают за 1 астрономическую единицу (а. е.). Воспользовавшись данными таблицы в упражнении 130, выразите в астрономических единицах расстояния от Солнца до Меркурия, от Солнца до Марса, от Солнца до Юпитера, от Солнца до Нептуна.
- 142** Расстояние от Земли до ближайшей после Солнца звезды α Центавра равно $4,1 \cdot 10^{13}$ км. За какое время доходит до Земли свет от Солнца и от звезды α Центавра? (Скорость света 300 000 км/с.)
- 143** В 2007 г. одна из телефонных компаний России обеспечила $1,68 \cdot 10^9$ междугородных телефонных переговоров, причём $1,88 \cdot 10^8$ из них были международными. Сколько процентов всего количества междугородных телефонных разговоров составили международные?
- 144** В 2011 г. численность населения Земли составила 7 млрд человек. Примерная численность населения через x лет после 2011 г. или за x лет до этого времени (при небольших значениях x) может быть рассчитана по формуле

$$P = 7 \cdot 10^9 \cdot 1,012^x.$$

Запишите выражение для вычисления численности населения Земли и определите примерную численность населения:

- а) в 2017 г.; б) в 2005 г.

Подсказка. б) Подумайте, какой знак должен иметь показатель степени x в этом случае.

1.7 Свойства степени с целым показателем

1 Известные свойства степени с натуральным показателем распространяются и на степень с любым целым показателем. А именно:

Для любого $a \neq 0$ и любых целых m и n

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$a^m : a^n = a^{m-n};$$

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Для любых $a \neq 0$, $b \neq 0$ и любого целого n

$$(ab)^n = a^n b^n;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Рассмотрим для примера одно из свойств — *основное свойство степени*, которое выражается равенством

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Для случая, когда оба показателя положительны, т. е. являются числами натуральными, мы это свойство уже доказали. Чтобы показать, что оно справедливо при любых целых значениях m и n , нужно рассмотреть другие возможные варианты: оба показателя отрицательны; один отрицателен, а другой положителен; один из показателей равен 0. Не проводя доказательство в общем виде, ограничимся проверкой этого свойства на конкретных примерах.

Пусть $m = -5$ и $n = -3$, тогда

$$a^{-5} \cdot a^{-3} = \frac{1}{a^5} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^5 \cdot a^3} = \frac{1}{a^{5+3}} = a^{-(5+3)} = a^{(-5)+(-3)}.$$

Пусть $m = -4$ и $n = 6$, тогда

$$a^{-4} \cdot a^6 = \frac{1}{a^4} \cdot a^6 = \frac{a^6}{a^4} = a^{6-4} = a^{-4+6}.$$

Пусть $m = -8$ и $n = 0$, тогда

$$a^{-8} \cdot a^0 = a^{-8} \cdot 1 = a^{-8} = a^{-8+0}.$$

2 Так как свойства степени с целым показателем те же, что и свойства степени с натуральным показателем, то и действия над степенями с целыми показателями выполняются по таким же правилам.

Приведём примеры.

Пример 1. $x^{-6} \cdot x^{10} \cdot x^{-3} = x^{-6+10-3} = x^1 = x$

(при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются).

Пример 2. $\frac{a^6}{a^8} = a^{6-8} = a^{-2}$

(при делении степеней с одинаковыми основаниями из показателя степени делимого вычитается показатель степени делителя).

Пример 3. $(y^{-3})^{-1} \cdot y^{-3} = y^3 y^{-3} = y^{3-3} = y^0 = 1$

(чтобы возвести степень в степень, мы перемножили показатели степеней, а затем воспользовались правилом умножения степеней с одинаковыми основаниями).

3 Вернёмся ещё раз к определениям степени с целым отрицательным и нулевым показателями. Свойства степеней с натуральными показателями оказались справедливыми и для степеней с любыми целыми показателями в силу того, что были приняты именно такие определения.

В самом деле, когда мы рассматривали свойства степеней с натуральными показателями, равенство $a^m : a^n = a^{m-n}$ было получено при условии, что $m > n$. Распространяя это свойство на случай, когда $m = n$, получим $a^m : a^n = a^{m-n} = a^0$. С другой стороны, если $m = n$, то $a^m : a^n = 1$. Отсюда и ясна целесообразность принятого нами определения степени с нулевым показателем: $a^0 = 1$ при любом $a \neq 0$.

Аналогичными рассуждениями можно показать также и целесообразность определения степени с целым отрицательным показателем.

□ Во фрагменте 1 выполнена проверка основного свойства степени с целым показателем на конкретных примерах. Проведите аналогичным образом проверку этого свойства, если: а) $m = -1$, $n = -10$; б) $m = 8$, $n = -2$; в) $m = 0$, $n = -12$.

□ а) Во фрагменте 2 в каждом примере сформулировано некоторое правило выполнения действий со степенями с целыми показателями. Найдите в учебнике для каждого правила соответствующее свойство, записанное с помощью букв.

б) Запишите в виде степени с основанием a : $a^{15} \cdot a^{-12}$; $a^7 \cdot a^{-7}$; $\frac{a^{-6}}{a^{-2}}$; $(a^{-3})^3$.

□ Какие из следующих выражений нельзя упростить на основе свойств степени с целым показателем?

1) $a^{-7} \cdot a^{12}$ 2) $m^6 \cdot n^{-9}$ 3) $\frac{x^{10}}{y^5}$ 4) $\frac{b^5}{b^{10}}$

Объясните свой ответ.

А

145 Действуем по правилу Представьте выражение в виде степени:

а) $b^{-3} \cdot b^{-7}$; в) $\frac{m^8}{m^{12}}$; д) $(y^{-4})^2$; ж) $x^{-7} \cdot y^{-7}$;

б) $x^{12} \cdot x^{-3} \cdot x^{-10}$; г) $a^{-4} : a^{-3}$; е) $(c^3)^{-5}$; з) $\frac{n^{-4}}{m^{-4}}$.

Применяем алгебру (146–147) Найдите значение выражения.

146 а) $\frac{5^{-4}}{5^{-6}}$; б) $3^{-12} \cdot 3^{10}$; в) $(10^{-4})^{-1}$; г) $(8^{-5})^0$.

147 а) $\left(\frac{3}{7}\right)^3 \cdot 7^3$; б) $\frac{6^2}{24^2}$; в) $3^{-4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$; г) $\frac{10^{-6}}{5^{-6}}$.

Упростите выражение (148–150).

148 а) $3x^{-3} \cdot 5x^{-5}$; в) $\frac{4a^{-2}}{6a^{-3}}$; д) $(2b^{-4})^3$;

б) $2m^{-6} \cdot 0,5m^{10}$; г) $\frac{12c^5}{15c^{-5}}$; е) $\left(\frac{1}{10}z^3\right)^{-2}$.

149 а) $x^{-2}y \cdot xy^{-2}$; в) $abc^{-1} \cdot ab^{-1}c^{-1}$; д) $\frac{pq^{-2}}{p^3q^3}$;

б) $bx^{-3} \cdot b^{-1}x^5$; г) $\frac{m^{-2}n^5}{m^{-4}n^{-1}}$; е) $(a^{-3}b^2)^{-5}$.

150 а) $\frac{x^{-10}x^5}{x^6}$; г) $\left(\frac{y^4}{y^{-1}y^{-2}}\right)^4$; ж) $\left(\frac{n^4}{n^{-7}}\right)^{-2} \cdot n^{-5}$;

б) $a^8(a^{-4})^3$; д) $\frac{(c^7c^{-2})^{-3}}{c^{-8}}$; з) $(2b^{-3} \cdot 5b^2)^{-2}$;

в) $(m^{-3}m^8)^{-2}$; е) $(p^{-4})^2 \cdot (p^{-3})^{-2}$; и) $\left(\frac{3}{x^{-3}} \cdot \frac{x^3}{6}\right)^{-1}$.

Применяем алгебру (151–155)

151 Найдите значение выражения:

а) $\frac{5^{-10}}{5^{-3} \cdot 5^{-5}}$; в) $10^{-12} \cdot (10^{-5})^{-2}$; д) $\frac{(7^{-2})^3}{7^{-4}}$;

б) $\frac{12^{-3} \cdot 12^{-7}}{12^{-9}}$; г) $(3^{-20} \cdot 3^{21})^{-3}$; е) $\frac{2^{-15}}{(2^5)^{-4}}$.

152 Вычислите:

а) $125 \cdot 5^{-4}$; б) $100^3 \cdot 10^{-8}$; в) $16^{-2} : 2^{-5}$; г) $(27^2 \cdot 3^{-8})^{-1}$.

- 153** Представьте выражение в виде степени с основанием a и найдите его значение при заданном значении a :

а) $\frac{a^{-3} \cdot a^7}{a^6}$, $a = 10$; в) $a^{-14}(a^{-2})^{-5}$, $a = \frac{2}{3}$;

б) $\frac{a^{18}}{a^{-10} \cdot a^{31}}$, $a = \frac{1}{5}$; г) $\frac{1}{a^{-10}} \cdot \frac{1}{a^{12}}$, $a = -4$.

- 154** а) Нанометр — это миллиардная часть метра, т. е. $1 \text{ нм} = 10^{-9} \text{ м}$. Выразите 1 нм в: км; см; мм; мкм.

Образец. Найдём, какую часть микрона составляет 1 нанометр . Микрон (другое название — микрометр) — это тысячная доля миллиметра, т. е. миллионная доля метра; $1 \text{ мкм} = 10^{-6} \text{ м}$,

$$1 \text{ нм} = 10^{-9} \text{ м}, \quad \frac{1 \text{ нм}}{1 \text{ мкм}} = \frac{10^{-9} \text{ м}}{10^{-6} \text{ м}} = 10^{-3}, \text{ т. е. } 1 \text{ нм} = 10^{-3} \text{ мкм}.$$

б) Данные на компакт-диски записываются в виде углублений, имеющих размеры 100 нм глубины и 500 нм ширины. Выразите эти размеры в метрах.

в) В современных технологиях производства микросхем используются элементы размером от 25 до 45 нм , и в будущем эти размеры планируют уменьшить до 15 нм . Выразите эти данные в метрах.

- 155** Выполните вычисления и результат представьте в десятичной записи:

а) $(1,8 \cdot 10^3) \cdot (2 \cdot 10^4)$; д) $\frac{6,6 \cdot 10^5}{1,1 \cdot 10^7}$;

б) $(2,1 \cdot 10^{-5}) \cdot (6 \cdot 10^7)$; е) $\frac{5,6 \cdot 10^{-2}}{7 \cdot 10^3}$;

в) $(3 \cdot 10^6) \cdot (6,4 \cdot 10^{-10})$; ж) $\frac{6 \cdot 10^{-8}}{1,2 \cdot 10^{-4}}$;

г) $(5 \cdot 10^{-3}) \cdot (3,2 \cdot 10^{-1})$; з) $\frac{1,9 \cdot 10^{-5}}{3,8 \cdot 10^{-3}}$.

Б

- 156** Представьте в виде степени с основанием 2 :

а) $4^x \cdot 4^y$; $8^x : 8^y$; $\left(\left(\frac{1}{4}\right)^x\right)^y$; б) $4^{-n} \cdot 4^{2n}$; $\frac{16^{8n}}{16^{2n}}$; $((0,25)^{-3})^n$.

157 Найдите значение выражения:

а) $3^{10} \cdot 81^3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{10}$; в) $\frac{6^{-10}}{81^{-2} \cdot 32^{-2}}$;

б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-25} \cdot 25^{-6} \cdot 125^{-4}$; г) $\frac{20^{-4} \cdot 15^{-3}}{30^{-7}}$.

158 Известно, что $2^n = a$. Выразите через a :

а) 2^{n+1} ; б) 2^{n+2} ; в) 2^{2n+1} ; г) 2^{n-1} .

Сократите дробь (159—161).

159 а) $\frac{5^{n+1} \cdot 3^{n-1}}{15^n}$; в) $\frac{12^n}{2^{2n+1} \cdot 3^{n-1}}$;

б) $\frac{14^n}{2^{n-2} \cdot 7^{n+2}}$; г) $\frac{2^{2n-1} \cdot 5^{2n+1}}{100^n}$.

160 а) $\frac{a^{-1} + a^{-2} + a^{-3}}{a^3 + a^2 + a}$; б) $\frac{1 + d^3 + d^5}{d^{-6} + d^{-3} + d^{-1}}$.

161 а) $\frac{2^n + 2^{n+2}}{10 \cdot 2^n}$; б) $\frac{10^{n+2} - 10^{n-2}}{10^n}$; в) $\frac{3^{n+1} - 3^{n-1}}{3^{n-2}}$.

162 Преобразуйте в дробь выражение:

а) $(x^{-2} - y^{-2}) : (x^{-1} + y^{-1})$; в) $(a + b)^{-2} \cdot (a^{-2} - b^{-2})$;

б) $(m + n)^{-1} \cdot (m^{-1} + n^{-1})$; г) $(xy^{-1} - x^{-1}y) : (x - y)$.

163 ■ РАССУЖДАЕМ ■ Расположите числа в порядке возрастания:

а) $8,7 \cdot 10^{-7}$; $65 \cdot 10^{-5}$; $0,12 \cdot 10^{-6}$; $940 \cdot 10^{-12}$;

б) $4,5 \cdot 10^{-15}$; $0,015 \cdot 10^{-18}$; $434 \cdot 10^{-13}$; $61 \cdot 10^{-13}$.

164 ■ АНАЛИЗИРУЕМ И РАССУЖДАЕМ ■ В таблице даны некоторые значения выражения x^n . Заполните таблицу, вписывая в свободные клетки произведения или частные содержащихся в ней чисел (например, так, как это сделано на пересечении строки 4 и столбца 6). Сравните свои результаты с результатами соседа по парте. (У вас могли получиться разные выражения.)

$x \backslash n$	2	3	4	5	6	7	8	-5
2	4	8	16	32	64	128	256	
3	9	27	81					
4	16	64			256 · 16			
6	36							

1.8 Решение уравнений и задач

1 Пример 1. Решим уравнение $\frac{3x}{2} + \frac{8-4x}{7} = 3$.

Чтобы избавиться от дробей, входящих в уравнение, воспользуемся уже известным приёмом: умножим обе части уравнения на наименьший общий знаменатель дробей, т. е. на число 14. Получим

$$\begin{aligned} 14 \cdot \left(\frac{3x}{2} + \frac{8-4x}{7} \right) &= 14 \cdot 3, \\ \frac{14 \cdot 3x}{2} + \frac{14(8-4x)}{7} &= 42, \\ 7 \cdot 3x + 2(8-4x) &= 42, \\ 21x + 16 - 8x &= 42, \\ 13x &= 26, \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Пример 2. Решим уравнение $0,09y + 0,12(10 - y) = 9$.

Это уравнение внешне не похоже на предыдущее, однако оно содержит десятичные дроби и его легче решить, если воспользоваться тем же приёмом.

Умножим обе части уравнения на 100:

$$\begin{aligned} 100 \cdot 0,09y + 100 \cdot 0,12(10 - y) &= 100 \cdot 9, \\ 9y + 12(10 - y) &= 900, \\ 9y + 4(10 - y) &= 300, \\ 9y + 40 - 4y &= 300, \\ -y &= 260, \\ y &= -260. \end{aligned}$$

2 При решении задач алгебраическим способом часто получают уравнения, содержащие дроби, и при их решении целесообразно пользоваться разобранным выше приёмом — избавляться от дробей. Рассмотрим один пример такой задачи, которая является новой для вас.

Пример 3. Сколько граммов воды надо добавить к 50 г раствора, содержащего 8 % соли, чтобы получить 5 %-ный раствор?

Решение. Составим уравнение по условию данной задачи.

Пусть x г — количество воды, которое надо добавить. Так как исходное количество раствора — 50 г, то новое количество раствора — $(50 + x)$ г.

Количество соли в исходном растворе составляет 8 % от 50 г, т. е. $0,08 \cdot 50$ г.

Количество соли в новом растворе составляет 5 % от $(50 + x)$ г, т. е. $0,05 \cdot (50 + x)$ г.

Так как количество соли от добавления воды не изменилось, то оно одинаково в исходном и новом растворах. Поэтому можно записать равенство

$$0,08 \cdot 50 = 0,05 \cdot (50 + x).$$

Решим составленное уравнение. Умножим обе его части на 100:

$$100 \cdot 0,08 \cdot 50 = 100 \cdot 0,05 \cdot (50 + x),$$

$$8 \cdot 50 = 5 \cdot (50 + x),$$

$$8 \cdot 10 = 50 + x,$$

$$x = 30.$$

Ответ. Надо добавить 30 г воды.

Задача, которую мы решили, — это так называемая задача на концентрацию. Концентрацией раствора называют отношение массы содержащегося в нём сухого вещества к массе раствора, выраженное в процентах. С процентами приходится иметь дело и при решении многих других задач, например задач на вычисление прибыли с банковских вкладов, дохода от инвестиций, на расчёт объёмов выполненных работ. Все такие задачи нетрудно решить, если вы умеете выражать проценты обыкновенной или десятичной дробью и решать главную задачу на проценты — находить процент от заданной величины.

- Решите уравнение $\frac{x-1}{3} - \frac{x+1}{2} = 1$ по образцу примера 1, прокомментируйте каждый шаг.
- Разберите решение уравнения в примере 2 и прокомментируйте каждый шаг.
- Что понимают под словами «концентрация раствора» (фрагмент 2)? Найдите концентрацию раствора соли в банке, содержащей 750 г воды, в которую добавили 15 г соли.
- Составьте уравнение по условию задачи, взяв в качестве образца пример 3: «Сколько воды надо добавить к 120 г сиропа, содержащего 25 % сахара, чтобы получить 15 %-ный раствор сахара?»

А

Решите уравнение; в качестве образца используйте пример 1 из текста (165—167).

165 а) $\frac{x-2}{15} = \frac{1}{3};$

в) $\frac{x-8}{5} = \frac{x+4}{2};$

д) $\frac{x+5}{2} = \frac{9}{4};$

б) $\frac{3x-2}{2} = 5;$

г) $\frac{3x-1}{6} = \frac{2+x}{3};$

е) $\frac{2x-7}{2} = \frac{2x+7}{3}.$

166 а) $\frac{x+5}{2} - \frac{x}{3} = 8$; в) $\frac{1-x}{7} = 1 - \frac{2-x}{3}$;

б) $\frac{x}{5} - \frac{x+1}{3} = 3$; г) $\frac{2x-1}{3} - 3 = \frac{x}{4}$.

167 а) $\frac{x}{3} - 2 = x$; в) $4 - x = \frac{x+5}{8}$;

б) $x - \frac{3-4x}{2} = 3$; г) $\frac{1-4x}{9} - 5 = 2x$.

168 Решите уравнение (воспользуйтесь примером 2 из текста):

а) $0,26x - 0,05(x-3) = 0,06x$;

б) $0,12 + 0,76x = 0,66(x+1)$;

в) $0,06(x-3) + 0,005(x-4) = -0,005$;

г) $0,005(x+2) = 0,007x + 0,001(x-5)$.

Составьте уравнение по условию задачи, обозначив буквой величину, о которой спрашивается, и решите задачу. Затем составьте какое-нибудь другое уравнение (169—173).

169 Отдел имеет премиальный фонд, и к концу квартала каждому сотруднику планировалось выдать премию в размере 500 р. Но 2 сотрудника ушли из отдела, поэтому каждый получил по 700 р. Сколько рублей было в премиальном фонде?

170 Сергей ходит от дома до стадиона пешком со скоростью 4 км/ч. Однажды он отправился из дома в обычное время, но поехал на велосипеде со скоростью 12 км/ч. На стадион он приехал на 15 мин раньше обычного. Чему равно расстояние от дома до стадиона?



171 Таня вышла из дома и направилась к бассейну со скоростью 50 м/мин. Через 4 мин из этого же дома вышел Андрей и пошёл к бассейну со скоростью 60 м/мин вслед за Таней. Найдите расстояние от дома до бассейна, если они пришли туда одновременно.

172 Расстояние между пунктами А и В равно 30 км. Из А в направлении В выехал мотоциклист со скоростью 40 км/ч. Одновременно из В в том же направлении выехал велосипедист со скоростью 10 км/ч. На каком расстоянии от пункта В мотоциклист догонит велосипедиста?

- 173** Из пункта A в пункт B выехал автобус со скоростью 40 км/ч. Через 4 ч из B в A выехал автомобиль со скоростью 60 км/ч. Расстояние от A до B равно 250 км. На каком расстоянии от пункта A автомобиль и автобус встретились?

РАЗБИРАЕМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ

- 174** Разберите, как составлено уравнение по условию задачи, и доведите решение до конца:

«Клиент открыл счёт в банке на некоторую сумму денег. Годовой доход по этому вкладу составляет 11 %. Если бы он добавил 800 р., то через год получил бы доход 220 р. Какая сумма была внесена им в банк?»

Составление уравнения:

1) x р. — сумма, которую клиент внёс в банк.

2) $(x + 800)$ р. — такая сумма была бы на вкладе, если бы он добавил 800 р.

3) $0,11(x + 800)$ р. — доход в 11%, который мог бы получить клиент с этой суммы.

Так как доход равен 220 р., то имеем равенство

$$0,11(x + 800) = 220.$$

- 175** Получив премию, сотрудник фирмы решил положить её на счёт в банке. Он может открыть счёт с годовым доходом 8 %. Если бы банк выплачивал 11% годовых, то для получения такого же дохода потребовалось бы на 900 р. меньше. Определите, сколько рублей составляла премия.

Б

Решите уравнение (176—177).

- 176** а) $\frac{3x+4}{5} + 2x = \frac{22-x}{5} + 16$; в) $2x + \frac{2x-1}{2} - 1 = \frac{5x-2}{3}$;
 б) $\frac{3x-5}{2} - \frac{2x-3}{3} = 4 - x$; г) $\frac{x-6}{4} - \frac{2x-1}{6} = 2 + 2x$.
- 177** а) $\frac{x-1}{2} - \frac{2x+1}{3} + \frac{x+2}{3} = 1$; в) $x + \frac{x-10}{2} + \frac{x-9}{5} = \frac{2x-3}{5} - 1$;
 б) $\frac{x-2}{3} + \frac{x-1}{2} - \frac{x-3}{6} = 0$; г) $\frac{1-2x}{3} - \frac{5-3x}{6} + \frac{1-3x}{2} = x + 4$.

Решите задачу (178—185).

- 178** Туристы отправляются на лодке вверх по реке на рыбалку и должны вернуться на базу через 4 ч. Скорость лодки в стоячей воде 8 км/ч, скорость течения реки 2 км/ч. Туристы пла-

нируют провести на рыбалке 3 ч. На какое максимальное расстояние они могут отплыть от базы?

- 179** Два велосипедиста одновременно выехали с базы на велотрек, куда им надо прибыть к определённом времени. Первый ехал со скоростью 15 км/ч и успел приехать за 5 мин до назначенного времени. Второй ехал со скоростью 12 км/ч и опоздал на 4 мин. На каком расстоянии от велотрека находится база?
- 180** Коллектив предприятия получил землю для садовых участков. Эту землю решили распределить между сотрудниками поровну, и каждому полагалось по 7 соток. Но выделенную землю удалось увеличить на 20 соток, кроме того, 10 сотрудников отказались от садовых участков, поэтому каждый получил по 10 соток. Сколько земли оказалось в распоряжении предприятия?
- 181** Лена набирала на компьютере рукопись книги. Ей надо было набирать по 10 страниц в день, чтобы успеть выполнить работу к сроку. Она же набирала ежедневно на 1 страницу больше, поэтому за 2 дня до срока ей осталось набрать 6 страниц. Сколько страниц было в рукописи?
- 182** Андрей, развивая выносливость в беге, сначала бежал 40 мин по просёлочной дороге, а затем по лесной тропе. И хотя путь по тропе оказался на 2 км короче, он затратил на него на 5 мин больше, так как уменьшил скорость на 4 км/ч. Какое расстояние пробежал Андрей?
- Решите задачу, взяв за образец пример 3 из текста (183—185).
- 183** Сколько граммов воды надо добавить к 80 г раствора, содержащего 15 % соли, чтобы получить 12 %-ный раствор?
- 184** Сколько граммов 25 %-ного сахарного сиропа надо добавить к 200 г воды, чтобы концентрация сахара в полученном растворе была 5 %?
- 185** Сколько граммов воды надо выпарить из 80 г 6 %-ного раствора соли, чтобы получить раствор, содержащий 10 % соли?
- 186** ■ **РАЗБИРАЕМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ** ■ Разберите, как составлено уравнение по условию задачи, и доведите решение до конца: «Сколько граммов 75 %-ного раствора кислоты надо добавить к 30 г 15 %-ного раствора этой же кислоты, чтобы получить 50 %-ный раствор?»



Составление уравнения:

- 1) x г — количество 75 %-ного раствора кислоты, которое надо добавить;
- 2) $(30 + x)$ г — масса получившегося 50 %-ного раствора кислоты;
- 3) $0,75x$ г — количество кислоты в x г 75 %-ного раствора;
- 4) $0,15 \cdot 30$ г — количество кислоты в 30 г 15 %-ного раствора;
- 5) $0,5(30 + x)$ г — количество кислоты в 50 %-ном растворе.

Уравнение:

кол-во кислоты в 75 %-ном растворе	+	кол-во кислоты в 15 %-ном растворе	=	кол-во кислоты в 50 %-ном растворе
$0,75x$	+	$0,15 \cdot 30$	=	$0,5(30 + x)$

- 187** Сколько граммов 30 %-ного раствора соли надо добавить к 80 г 12 %-ного раствора этой же соли, чтобы получить 20 %-ный раствор соли?

Совет. При составлении уравнения рассуждайте так же, как в задаче 186.

Решите задачу (188—189).

- 188** Два слитка, один из которых содержит 35 % серебра, а другой — 65 %, сплавляют и получают слиток массой 20 г, содержащий 47 % серебра. Чему равна масса каждого из этих слитков?
- 189** Инвестиционный фонд вложил деньги в два предприятия, приносящие годовой доход в 12 % и 15 %. В первое он внёс на 300 тыс. р. больше, чем во второе, и получил в нём за год на 6 тыс. р. больше. Сколько рублей внёс инвестиционный фонд в каждое из этих предприятий?

1.9 Сокращение дробей

(Для тех, кому интересно)

Математика, как вы уже много раз слышали, создавалась для решения практических задач. В то же время за многие века математика стала вполне самостоятельной наукой в том смысле, что внутри её накопились задачи, представляющие интерес прежде всего для её собственного развития, для учёных-математиков. Такие задачи иногда совершенно не связаны с практикой, однако история математики знает примеры, когда создание математической теории,

внешне очень далёкой от практики, приводило впоследствии к решению важных проблем практики и других наук, оказывала влияние на мировоззрение человека.

Выбирая для решения ту или иную задачу, математики часто исходят прежде всего из того, насколько эта задача им интересна. Такие задачи в определённом смысле можно считать просто головоломками, однако их решение, сам процесс преодоления трудностей не только могут доставлять удовольствие, но и являются своего рода тренировкой интеллекта.

Здесь мы рассмотрим задачи, связанные с сокращением дробей. Такими задачами математики «развлекаются» не менее двух с половиной тысяч лет.

Задача 1. При каких целых n значение дроби $\frac{2n^2 + n - 9}{n + 3}$ является числом целым?

Решение. Данная дробь «неправильная» в том смысле, что степень многочлена в её числителе выше степени многочлена в знаменателе. Поэтому сначала выделим целую часть дроби, а для этого разделим уголком её числитель на знаменатель так, как мы это делали для числовых дробей:

$$\begin{array}{r} 2n^2 + n - 9 \quad | \quad n + 3 \\ - 2n^2 + 6n \\ \hline -5n - 9 \\ - -5n - 15 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\frac{2n^2 + n - 9}{n + 3} = (2n - 5) + \frac{6}{n + 3}$$

$$\begin{array}{r} 173 \quad | \quad 14 \\ - 14 \quad 12 \\ \hline 33 \\ - 28 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$\frac{173}{14} = 12 + \frac{5}{14} = 12 \frac{5}{14}$$

Теперь дробь $\frac{2n^2 + n - 9}{n + 3}$ записана в виде суммы многочлена $2n - 5$ и дроби $\frac{6}{n + 3}$. Значение многочлена $2n - 5$ при любом целом n есть число целое. Следовательно, надо выяснить, при каких целых n будет целым числом значение дроби $\frac{6}{n + 3}$. Для этого будем просто перебирать все делители числа 6 и вычислять соответствующие значения переменной n . При этом решение удобно оформить в виде таблицы:

$n + 3$	1	2	3	6	-1	-2	-3	-6
n	-2	-1	0	3	-4	-5	-6	-9

Ответ. Значение дроби $\frac{2n^2+n-9}{n+3}$ является целым числом при $n = 3; 0; -1; -2; -4; -5; -6; -9$.

Задача 2. При каких натуральных значениях n дробь $\frac{3}{n+1}$ можно сократить?

Решение. Так как число 3 простое, то дробь можно будет сократить лишь в том случае, если в знаменателе окажется число, кратное 3. А для того чтобы число $n+1$ делилось на 3, необходимо, чтобы число n при делении на 3 давало остаток, равный 2, т. е. n может принимать значения 2, 5, 8, 11 и т. д. Всё множество значений n можно описать формулой $n = 3k - 1$, где k — натуральное число.

Ответ. При $n = 3k - 1$, где k — натуральное число.

Для решения следующей задачи потребуется такая теорема: *общие делители чисел $a-b$ и b те же самые, что у чисел a и b .*

Задача 3. При каких натуральных значениях n дробь $\frac{3n+1}{2n-1}$ можно сократить?

Решение. Общие делители чисел $3n+1$ и $2n-1$ те же самые, что и у чисел $(3n+1) - (2n-1) = n+2$ и $2n-1$. А общие делители чисел $2n-1$ и $n+2$ такие же, как у чисел $(2n-1) - (n+2) = n-3$ и $n+2$. А у этих чисел общие делители такие же, как у чисел $(n+2) - (n-3) = 5$ и $n+2$.

Таким образом, мы ищем натуральные числа, являющиеся общими делителями чисел 5 и $n+2$. Так как число 5 простое, то их общим делителем, отличным от 1, может быть только 5. Следовательно, нужно найти натуральные значения n , при которых $n+2$ делится на 5. А для этого нужно, чтобы при делении на 5 число n давало остаток 3. Это условие выполняется при $n = 5k + 3$, где $k = 0; 1; 2; 3; \dots$

Ответ. При $n = 5k + 3$, где $k = 0; 1; 2; 3; \dots$

Задача 4. При каких натуральных значениях n дробь $\frac{4n-3}{6}$ можно сократить?

Решение. При решении задач такого типа применяется следующий приём: так как речь идёт о делении на 6, то число n записывают в виде $6k + r$, где r — остаток от деления n на 6, $k = 0, 1, 2, \dots$

Выполнив подстановку $n = 6k + r$, получим

$$\frac{4(6k+r)-3}{6} = \frac{24k+4r-3}{6} = 4k + \frac{4r-3}{6}.$$

Следовательно, данная дробь будет сократимой, если сократима дробь $\frac{4r-3}{6}$.

Казалось бы, мы пришли к тому же, с чего начали: полученная дробь имеет такой же вид, что и данная, только вместо переменной n в ней стоит r . Но это различие принципиально: переменная n пробегает бесконечное множество значений — множество целых чисел, тогда как r как остаток от деления на 6 принимает лишь 6 значений: 0; 1; 2; 3; 4; 5.

А эти значения легко перебрать, ведя для удобства запись в виде таблицы:

r	0	1	2	3	4	5
$4r-3$	-3	1	5	9	13	17
Общие делители $4r-3$ и 6	есть	нет	нет	есть	нет	нет

Из этой таблицы видно, что общие делители есть при $r = 0$ или при $r = 3$, т. е. при $n = 6k$ и при $n = 6k + 3$, где k — любое натуральное число или 0.

190 Выполнив деление уголком, представьте данную дробь в виде суммы многочлена и «правильной» дроби:

а) $\frac{3n^2-10n-3}{n-4}$; б) $\frac{n^3+n^2-n+5}{n+2}$.

191 При каких целых n значение дроби является числом целым:

а) $\frac{10}{n+5}$; б) $\frac{15}{2n+1}$; в) $\frac{20}{3n-4}$?

192 Найдите все целые значения n , при которых значение дроби $\frac{8}{2n+1}$ является целым числом.

193 Найдите все целые значения n , при которых значение дроби есть число целое:

а) $\frac{2n^2+7n+3}{2n-1}$; б) $\frac{2n^3+n^2-3n-4}{n-2}$.

194 При каких натуральных значениях n можно сократить дробь:

а) $\frac{5}{n+3}$; б) $\frac{7}{n+2}$; в) $\frac{n+1}{10}$?

195 Докажите:

если каждое из чисел a и b делится на число c , то и их разность $a - b$ делится на c ;

если каждое из чисел $a - b$ и b делится на число c , то и число a делится на c .

Теперь у вас доказана теорема:

числа $a - b$ и b имеют те же общие делители, что и числа a и b .

196 При каких натуральных значениях n можно сократить дробь:

а) $\frac{2n+1}{n-1}$; б) $\frac{4n+3}{3n-1}$?

197 При каких натуральных значениях n можно сократить дробь:

а) $\frac{3n+1}{10}$; б) $\frac{5n+3}{4}$; в) $\frac{4n+2}{5}$?

Дополнительные задания**Алгебраические дроби****198** Найдите значение дроби при заданных значениях переменных:

а) $\frac{cxy}{c(x-y)}$ при $c = 1,5$, $x = 10$ и $y = -2$;

б) $\frac{x(a-b)}{a^2b}$ при $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{3}{4}$ и $x = \frac{1}{2}$.

199 Найдите значение выражения, если $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $x = 10$, $y = 0$, $z = \frac{1}{2}$:

а) $\frac{a(bc^2 - xz)}{b}$; в) $\frac{(a-x)(b-y)(c-z)}{a^2 + b^2}$;

б) $\frac{ab - bc - ax + ay}{a + b + c}$; г) $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(a-b)(b-c)}$.

200 Найдите значение дроби при заданных значениях переменной:

а) $\frac{x^2 - 25}{2x}$ при $x = -5$, при $x = 5$;

б) $\frac{y(y+6)}{y-4}$ при $y = 0$, при $y = -6$.

201 Найдите значения переменной, при которых значение дроби равно нулю:

а) $\frac{5a-4}{a+1}$; б) $\frac{2m^2}{m-2}$; в) $\frac{(n-6)(2n+10)}{6n^2}$; г) $\frac{b(b+2)(3b-6)}{b-10}$.

202 Приведите дробь $\frac{a}{a^2-b^2}$ к знаменателю:

а) $(a-b)(a+b)^2$; б) $(a-b)^2(a+b)$; в) $(a-b)^3(a+b)$.

203 Замените выражение равным выражением так, чтобы перед дробью не было знака «минус». Выполните задание разными способами:

а) $-\frac{(a-b)(a-c)}{b-c}$; б) $-\frac{(x+y)(y-z)}{2(x-z)(x-y)}$.

204 Сократите дробь:

а) $\frac{x^2-y^2+ax+ay}{a^2+xy+ax-y^2}$; в) $\frac{y^4-2y^2+1}{y^3-y^2-y+1}$; д) $\frac{x^4-y^4}{x^4+2x^3y+2x^2y^2+2xy^3+y^4}$;
 б) $\frac{m^3+m^2-m-1}{m^3-m^2-m+1}$; г) $\frac{p^3+pq^2-2p^2q}{p^3-pq^2}$; е) $\frac{x^4-y^4}{x^3+xy^2-x^2y-y^3}$.

Упростите выражение (205—207).

205 а) $\frac{a^2+b^2}{a^3-b^3} - \frac{2}{3a-3b}$; б) $\frac{2m^2}{m^3+n^3} - \frac{m-n}{m^2-mn+n^2}$.

206 а) $\frac{8}{(x^2-2)^3} + \frac{8}{(2-x^2)^2} - \frac{2}{2-x^2}$; в) $\frac{a^2-9}{a-1} \cdot \frac{a-a^4}{3+a} \cdot \frac{1}{(3a-a^2)^2}$;
 б) $\frac{a-c}{a^2+ac+c^2} - \frac{2}{c-a} - \frac{3c^2}{a^3-c^3}$; г) $\frac{a^4-b^4}{a^2+ab+b^2} \cdot \frac{1}{(b-a)^3} \cdot \frac{a^2+b^2}{a^3-b^3}$.

207 а) $\frac{3a+b}{a+b} + \frac{a^2-2ab+b^2}{a} \cdot \left(\frac{a}{(a-b)^2} + \frac{a}{b^2-a^2} \right)$;
 б) $\frac{1-2b^2-2ab}{b^2-a^2} + \left(\frac{a^2+ab+b^2}{a^3+b^3} - \frac{b^3-a^3}{a^2-ab+b^2} \right) \cdot \frac{a^2-ab+b^2}{a^3-b^3}$.

Совет. Сначала раскройте скобки, применив распределительное свойство, тогда преобразования окажутся проще.

208 Докажите, что:

а) $\frac{a-b}{a^2+ab} - \frac{a+3b}{ab+b^2} + \frac{a+b}{ab} = 0$; б) $\frac{b}{a^2-ab} - \frac{a}{ab-b^2} + \frac{a+b}{ab} = 0$.

209 Докажите, что:

а) $1 + \frac{1}{a} + \frac{1+a}{ab} + \frac{(1+a)(1+b)}{abc} + \frac{(1+a)(1+b)(1+c)}{abcd} = \frac{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)}{abcd}$;

б) $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} = \frac{8}{1-a^8}$;

в) $\frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ac}{(b-a)(b-c)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)} = 1$.

Совет. Найдите сумму первых двух слагаемых, прибавьте к ней третье слагаемое и т. д.

210 Упростите выражение:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \frac{u - \frac{u^2}{u+1}}{u - \frac{u}{u+1}}; & \text{в) } \frac{\frac{a-b}{a+b} + \frac{b}{a}}{\frac{a}{a+b} + \frac{a-b}{a}}; & \text{д) } 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{n-3}}; \\ \text{б) } \frac{x - \frac{6x-9}{x}}{\frac{3}{x} - 1}; & \text{г) } \frac{\frac{x}{x-z} - \frac{y}{y-z}}{\frac{y}{x-z} - \frac{x}{y-z}}; & \text{е) } \frac{n}{n - \frac{1}{1 - \frac{n}{1+n}}}. \end{array}$$

Совет. а) Можно воспользоваться основным свойством дроби: умножить числитель и знаменатель данной дроби на $u+1$.

211 Упростите выражение:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}\right) : \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right); \\ \text{б) } \left(\frac{u}{v-z} + \frac{v-z}{v} - \frac{uz}{v^2-vz}\right) : \left(\frac{u}{v-z} - \frac{v-z}{v} - \frac{uz}{v^2-vz}\right). \end{array}$$

Совет. Запишите частное в виде дроби и затем воспользуйтесь основным свойством дроби.

212 а) Дано: $x - \frac{x}{x+1} = y$. Выразите $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2}$ через y .

б) Дано: $x + \frac{x}{x-1} = y$. Выразите $x^2 + \frac{x^2}{(x-1)^2}$ через y .

Степень с целым показателем

213 Сравните числа a^{-1} и b^{-1} , если известно, что:

а) $a > 0$, $b > 0$, $a > b$; б) $a < 0$, $b < 0$, $a > b$.

214 Сравните числа a^{-1} и a^{-2} , если известно, что:

а) $0 < a < 1$; б) $a > 1$; в) $-1 < a < 0$; г) $a < -1$.

Упростите выражение (215—216).

215 а) $-\frac{1}{2}a^2b^3 \cdot \frac{3}{2}a^{-2}b^{-3}$; в) $(2m^{-3}n)^{-2} \cdot 8m^{-5}n$;

б) $10x^{-1}y^{-10} \cdot 0,05x^3y^{-10}$; г) $3p^4q^{-3} \cdot (3pq^{-3})^{-1}$.

216 а) $\frac{2x^{-12}y^{12}}{5} \cdot \frac{10x^{13}}{y^{-12}}$; в) $\frac{11a^{-4}}{b^4} \cdot \frac{b^{12}}{22a^8}$;

б) $\frac{12m^6}{n^{-6}} \cdot \frac{3m^{-3}n^{-5}}{4}$; г) $\frac{8p^{-8}}{q^{-10}} \cdot \frac{q^{-8}}{16q^{-9}}$.

● Уравнения и задачи

217 Решите уравнение:

а) $\frac{5x-2}{3} - \frac{4x-3}{5} = 6$; в) $0,03x - 1 = 0,02(2x + 5)$;

б) $\frac{2x-4}{3} + x = 7$; г) $0,7(x - 1) - 0,8(x + 3) = 0,1(x - 5)$.

218 Моторная лодка прошла по течению реки от одной деревни до другой. На обратном пути она сделала остановку, не дойдя до места отправления 12 км. До остановки она двигалась столько же времени, сколько у неё занял путь по течению. Чему равно расстояние между деревнями, если известно, что собственная скорость лодки 12 км/ч, а скорость течения реки 3 км/ч?

219 а) Курьер доехал на велосипеде до почты и вернулся обратно другой дорогой, которая на 3 км короче. До почты он ехал со скоростью 18 км/ч, а обратно — со скоростью 9 км/ч, и на весь путь у него ушло 3 ч. Найдите весь путь, который проделал курьер.

б) Из города в посёлок можно добраться по шоссе на автомобиле или по реке на катере. Путь по шоссе на 8 км короче, чем по реке. Автомобиль доезжает до посёлка за 20 мин, а катер проходит расстояние от города до посёлка за 1 ч 20 мин. Скорость автомобиля на 39 км/ч больше скорости катера. Определите расстояние от города до посёлка по шоссе и по реке.



220 а) Клиент внёс в банк 8000 р. Часть этих денег он положил на вклад, по которому начисляется 8 % годовых, а остальные — на вклад, по которому начисляется в год 6 %. Через год он получил с этих двух вкладов прибыль в 580 р. Сколько рублей он внёс на каждый вклад?

б) Клиент имел в банке счёт, по которому начислялось 6 % годовых. После того как банк предложил новые виды вкладов, он снял с этого счёта все деньги. Из них 4000 р. он положил на вклад, по которому начисляется 8 % годовых, а остальные деньги — на вклад с 9 % годовых. В результате через год его доход оказался на 260 р. больше, чем он был бы по прежнему вкладу. Сколько всего денег внёс клиент на новые вклады?

- 221** Сколько граммов воды надо добавить к 180 г сиропа, концентрация сахара в котором 25 %, чтобы получить сироп с концентрацией сахара 20 %?

Вероятность, статистика, комбинаторика

- 222** а) Приживаемость черенков гортензии составляет 70 %. Какое число укоренившихся черенков можно ожидать, если посажено 150 черенков?
 б) Всхожесть семян пшеницы нового сорта составила 96 %. Какое число проросших семян следует ожидать, если на опытную делянку посеяно 1200 семян?
- 223** а) Вероятность выпадания орла при бросании монеты равна 0,5. Игорь провёл 500 экспериментов, в которых орёл выпал 238 раз. На сколько частота выпадания орла в опыте Игоря отличается от вероятности этого события?
 б) По статистическим данным, в некотором регионе вероятность того, что родившийся младенец окажется мальчиком, равна 0,513. В 2010 г. в этом регионе на 1000 родившихся младенцев в среднем пришлось 479 девочек. На сколько частота рождения девочки в этом регионе в 2010 г. отличается от вероятности этого события?
- 224** На рисунке 1.7 представлены десять крупнейших стран мира по численности населения (млн человек). Рассмотрите диаграмму и ответьте на вопросы:

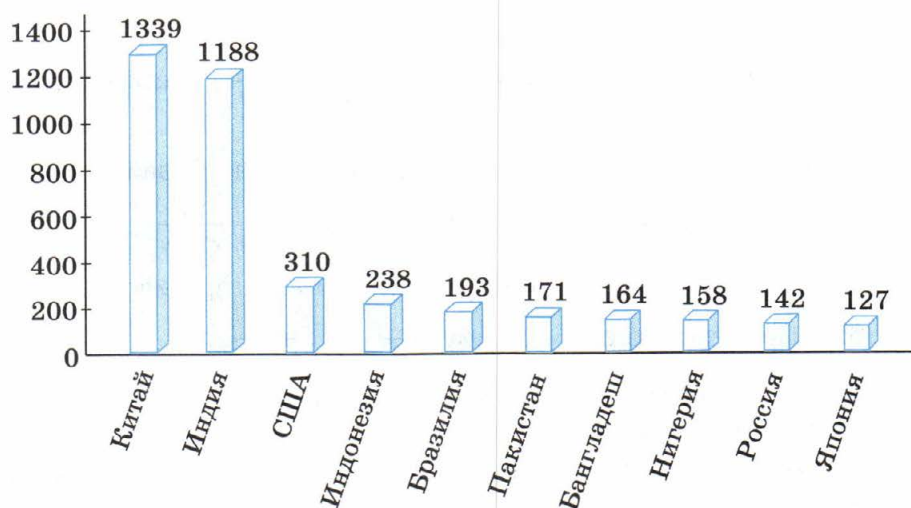


Рис. 1.7

- а) Какое место по численности населения занимает Россия?
- б) Численность каких государств составляет более 200 млн человек?
- в) Какова численность населения Китая?
- г) Численность населения какого государства примерно в 10 раз меньше численности населения Китая?
- д) Какой примерно процент численности населения Китая составляет численность населения России?

Чему вы научились

Это надо знать (основные теоретические сведения)

1. Укажите числа, которые не входят в множество допустимых значений переменной дроби: а) $\frac{2x-3}{x+8}$; б) $\frac{a-1}{a^2}$. Какие числа нельзя подставлять вместо букв в алгебраическую дробь?
2. Сформулируйте основное свойство дроби. Примените его для приведения дроби $\frac{a}{a+b}$ к знаменателю $ab + b^2$.
3. Объясните, как сократить дробь $\frac{m-mn}{m^2-mn}$.
4. Прочитайте словами свойства, которые в буквенном виде записываются так: $\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = -\frac{a}{-b} = -\frac{-a}{b}$. Примените их к дроби $\frac{a-2}{b-1}$.
5. Объясните, как сократить дробь $\frac{3y-3x}{x^2-y^2}$.
6. Объясните на примере выражения $\frac{x+m}{xm} + \frac{y-m}{ym}$, как выполняют сложение дробей с разными знаменателями.
7. Сформулируйте и запишите в буквенном виде правило умножения дробей. Примените его к произведению $\frac{x-y}{2x} \cdot \frac{2x^2}{x^2-y^2}$.
8. Сформулируйте и запишите в буквенном виде правило деления дробей. Примените его к частному $\frac{n}{m^2+mn} : \frac{n^2}{m^2-n^2}$.
9. Дайте определение степени с целым отрицательным показателем. Приведите примеры.
10. Дайте определение степени с нулевым показателем. Приведите примеры.
11. Запишите с помощью букв свойства степени с целым показателем.

Это надо уметь (обязательные результаты обучения)

1 Найдите значение дроби при указанных значениях переменных:

а) $\frac{ab}{a-b}$ при $a = 0,5$, $b = 2$; б) $\frac{x^2-y^2}{x}$ при $x = -10$, $y = -1$.

2 Укажите допустимые значения переменной для дроби:

а) $\frac{m}{2m-5}$; б) $\frac{x-3}{x^2}$; в) $\frac{n^2-1}{10}$.

3 Выразите из физической формулы $\alpha = (n-1)\Theta$:

а) переменную Θ ; б) переменную n .

4 Сократите дроби:

а) $\frac{16x^3y}{20x^2y^2}$; в) $\frac{m^2-n^2}{mn+n^2}$; д) $\frac{z-1}{a-az}$.

б) $\frac{a^2-ab}{a^2}$; г) $\frac{c^2+c}{c^2-c}$.

5 Выполните действия:

а) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{1}{x-1}$; б) $\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{2ab}{a+b}$.

6 Выполните действия:

а) $\frac{1}{2a} - \frac{1}{3a}$; в) $\frac{4x}{x^2-y^2} - \frac{4}{x+y}$;

б) $\frac{m}{m-n} + \frac{m}{m+n}$; г) $\frac{5a}{a-5} + \frac{25}{5-a}$.

7 Представьте выражение в виде дроби:

а) $\frac{3b}{a-b} + 3$; б) $2c - \frac{bc-6}{b}$.

8 Выполните умножение:

а) $\frac{x^2y}{2z} \cdot \frac{z^2}{2xy}$; б) $\frac{4b}{a^2-b^2} \cdot \frac{a+b}{2b}$; в) $2ac \cdot \frac{3c}{4a^2}$.

9 Выполните деление:

а) $\frac{m+1}{m} : \frac{3m+3}{m}$; б) $\frac{x^2-xy}{y} : (x-y)$.

10 Упростите выражение:

а) $\frac{10}{a^2-4} - \frac{3}{a-2} + \frac{4}{a+2}$; в) $\frac{2c}{c-3} - \frac{c^2+c}{4} : \frac{c+1}{8}$.

б) $\left(\frac{a}{a-b} - \frac{a}{a+b} \right) \cdot \frac{a-b}{ab}$;

- 11 Выразите из формулы $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$:
а) переменную a ; б) переменную c .
- 12 Вычислите: а) 8^{-2} ; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$.
- 13 Представьте выражение в виде степени: $a^{-2} \cdot a^6$; $\frac{x^3}{x^5}$; $(c^{10})^{-3}$.
- 14 Упростите выражение:
а) $\frac{a^{-12} \cdot a^6}{a^7}$; б) $\frac{(3x^{-2})^{-3}}{3^{-2} \cdot x^{-1}}$.
- 15 Запишите в стандартном виде число:
а) 1 280 000; б) 0,0000071.
- 16 Сравните:
а) $\frac{1,8 \cdot 10^9}{9 \cdot 10^{11}}$ и 0,005; б) $(1,4 \cdot 10^{-10})(2 \cdot 10^7)$ и 0,003.
- 17 Решите уравнение $\frac{x}{3} - \frac{2x-1}{4} = 1$.
- 18 Решите задачу:
«Турист вышел с турбазы и направился к железнодорожной станции со скоростью 4 км/ч. Через час с турбазы к станции пошёл второй турист со скоростью 5 км/ч. На станцию они пришли одновременно. Чему равно расстояние от турбазы до станции?»

Проверьте себя (тест)

- 1 Найдите значение дроби $\frac{ab}{a-b}$ при $a = -1$, $b = 0,5$.
- 2 Для каждой дроби укажите множество допустимых значений переменной.
А) $\frac{x-3}{x-2}$ Б) $\frac{x+3}{x+2}$ В) $\frac{x-2}{x+3}$ Г) $\frac{x+2}{x-3}$
1) $x \neq -3$ 2) $x \neq -2$ 3) $x \neq 2$ 4) $x \neq 3$
- 3 Сократите дробь $\frac{a^2b - ab}{a^2b + ab^2}$.
- 4 Сократите дробь $\frac{a^2 - x^2}{ax - x^2}$.

5 Укажите выражение, равное дроби $\frac{a-b}{a-c}$.

- 1) $\frac{b-a}{a-c}$ 2) $\frac{a-b}{c-a}$ 3) $-\frac{b-a}{c-a}$ 4) $\frac{b-a}{c-a}$

6 Найдите сумму дробей: $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3}$.

7 Представьте в виде дроби выражение $\frac{2m^2}{m+1} - 2m$.

8 Выполните деление: $\frac{x^2-y^2}{2x^2} : \frac{xy-y^2}{x}$.

9 Упростите выражение $\left(\frac{a}{a-b} - 1\right) : \left(\frac{a}{a+b} - 1\right)$.

10 Какое из выражений равно степени 5^{-n} ?

- 1) $-\frac{1}{5^n}$ 2) $\frac{1}{5^n}$ 3) -5^{-n} 4) $-\frac{1}{5^{-n}}$

11 На координатной прямой отмечено число a . Сравните числа a и a^{-1} .



- 1) $a < a^{-1}$ 2) $a > a^{-1}$ 3) $a = a^{-1}$ 4) невозможно сравнить

12 Миллиардные доли единиц обозначаются приставкой «нано-». Например, 1 нанометр = 10^{-9} м. Выразите эту величину в мм.

- 1) 10^{-3} мм 2) 10^{-7} мм 3) 10^{-6} мм 4) 10^{-12} мм

13 Укажите наименьшее из чисел.

- 1) $1,2 \cdot 10^{-8}$ 2) $5,6 \cdot 10^{-8}$ 3) $1,2 \cdot 10^{-9}$ 4) $5,6 \cdot 10^{-9}$

14 Сократите дробь $\frac{2^n + 2^{n-2}}{2^{n-4}}$.

15 Решите уравнение $\frac{x-1}{2} - \frac{x}{5} = \frac{1}{2}$.

16 Все имеющиеся на учительском столе карандаши можно разложить поровну в 3 большие коробки или в 5 маленьких. В маленькую коробку помещается на 6 карандашей меньше, чем в большую. Сколько карандашей на учительском столе?

Решая эту задачу, три ученика обозначили буквой x разные величины и составили разные уравнения, причём все они были правильными.

Введённые обозначения:

Уравнения:

А) x — число карандашей в маленькой коробке

1) $\frac{x}{3} - \frac{x}{5} = 6$

Б) x — число карандашей в большой коробке

2) $5x = 3(x + 6)$

В) x — число карандашей на учительском столе

3) $3x = 5(x - 6)$

Соотнесите введённое обозначение с уравнением.

Квадратные корни

У тех, кто ещё не знаком с математическим понятием квадратного корня, само это выражение может вызвать удивление. При чём здесь корень? Вы знаете биологическое значение слова «корень» — корень растения, корень зуба. В лингвистике есть понятие «корень слова». Употребляется оно и в переносном смысле. Вам знакомо выражение «корень зла», а в классическом толковом словаре русского языка Владимира Даля вы можете встретить поговорку «Корень учения горек, да плод его сладок».

Каков математический смысл слова «корень», как корень обозначается, каковы его свойства и для решения каких задач он применяется, как связано понятие корня с развитием математики, вы узнаете в этой главе.

2.1 Задача о нахождении стороны квадрата

1 Если известна длина стороны квадрата, то можно найти его площадь. В то же время приходится решать и обратную задачу — по известной площади квадрата находить его сторону.

Например, если площадь квадрата 100 см^2 , его сторона равна 10 см . Мы выбрали число, квадрат которого равен заданному значению площади. Таких чисел, вообще говоря, два: это 10 и -10 . Но мы, естественно, взяли то из них, которое является положительным; ведь отрицательным числом длина выражаться не может!

Если сторона квадрата равна a , то его площадь S можно вычислить по формуле $S = a^2$. Но в математике есть также способ и для выражения стороны квадрата через его площадь. Чтобы записать соответствующую формулу, нам придётся ввести новый символ: $\sqrt{S}$. Этим символом обозначена сторона квадрата, площадь которого равна S . Знак $\sqrt{}$ называют *знаком квадратного корня* или *радикалом* (от латинского слова *radix* — корень). Происхождение же символа $\sqrt{}$ связывают с рукописным написанием латинской буквы r , которое выглядело так: r . Читают выражение $\sqrt{S}$ так: *квадратный корень из S* .

С использованием введённого символа формула для нахождения стороны квадрата a , площадь которого равна S , запишется следующим образом:

$$a = \sqrt{S}.$$

Пусть, например, $S = 64$. Тогда $a = \sqrt{64}$ и нужно найти положительное число, квадрат которого равен 64. Так как $64 = 8^2$, то $\sqrt{64} = 8$. Мы заменили выражение $\sqrt{64}$ его значением — числом 8, или, как говорят, *извлекли квадратный корень из 64*.

2 В приведённом примере нам нетрудно было найти значение корня. Однако если *подкоренное число* большое, то для извлечения корня приходится пользоваться вспомогательными приёмами.

Пример 1. Найдём $\sqrt{2304}$.

Чтобы подобрать число, квадрат которого равен 2304, обратимся к таблице квадратов двузначных чисел, помещённой на форзаце. Из таблицы видно, что $2304 = 48^2$. Значит,

$$\sqrt{2304} = 48.$$

Пример 2. Найдём $\sqrt{15876}$.

Так как под корнем пятизначное число, то таблица квадратов двузначных чисел нам уже не поможет. Поэтому воспользуемся другим приёмом — разложим число 15 876 на множители.

Так как $15\,876 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7^2 = (2 \cdot 9 \cdot 7)^2$, то

$$\sqrt{15876} = 2 \cdot 9 \cdot 7 = 126.$$

3 При записи выражений, содержащих радикалы, так же как и других алгебраических выражений, нужно придерживаться некоторых правил. Так, числовой или буквенный множитель пишут перед радикалом, например $2\sqrt{16}$, $a\sqrt{b}$.

Знак корня, как и скобки, является группирующим символом. Если, например, нужно найти значение выражения $\sqrt{4^2 + 3^2}$, то сначала надо вычислить сумму $4^2 + 3^2$, а затем извлечь корень:

$$\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$$

- Запишите формулу для нахождения стороны a квадрата, площадь которого равна S . Прочитайте её. Найдите a при S , равном 121 см^2 .
- Пользуясь примером 1 из текста как образцом, вычислите $\sqrt{1089}$.
- Прочитайте выражения $2\sqrt{36}$ и $\sqrt{5^2 - 3^2}$. Найдите значение каждого из них, комментируя ход вычислений (фрагмент 3).

А

РАБОТАЕМ С СИМВОЛАМИ (225–226) Вычислите:

- 225** а) $\sqrt{4}$; г) $\sqrt{100}$; ж) $\sqrt{0,09}$;
 б) $\sqrt{36}$; д) $\sqrt{16}$; з) $\sqrt{0,49}$;
 в) $\sqrt{1}$; е) $\sqrt{0,01}$; и) $\sqrt{0,0064}$.

- 226** а) $\sqrt{\frac{1}{81}}$; в) $\sqrt{\frac{4}{25}}$; д) $\sqrt{\frac{400}{49}}$;
 б) $\sqrt{\frac{1}{100}}$; г) $\sqrt{\frac{9}{64}}$; е) $\sqrt{\frac{16}{9}}$.

227 Вычислите, пользуясь таблицей квадратов двузначных чисел:

- а) $\sqrt{169}$; в) $\sqrt{441}$; д) $\sqrt{1024}$; ж) $\sqrt{\frac{100}{361}}$; и) $\sqrt{1,44}$;
 б) $\sqrt{289}$; г) $\sqrt{625}$; е) $\sqrt{2401}$; з) $\sqrt{\frac{169}{9}}$; к) $\sqrt{0,0121}$.

228 Найдите значение выражения $\sqrt{x}$ при заданных значениях переменной:

- а) $x = 1; 9; 64$; в) $x = 0,01; 0,04; 0,36$.
 б) $x = \frac{1}{25}; \frac{49}{81}; \frac{100}{121}$;

229 ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО Верно ли, что:

- а) $\sqrt{2704} = 52$; в) $\sqrt{4,29} = 2,3$;
 б) $\sqrt{0,0324} = 0,18$; г) $\sqrt{0,961} = 0,31$?

РАССУЖДАЕМ (230–232)

230 Запишите равенство, связывающее данные числа, не используя знак $\sqrt{}$:

- а) $\sqrt{625} = 25$; в) $43 = \sqrt{1849}$;
 б) $34 = \sqrt{1156}$; г) $\sqrt{0,0441} = 0,21$.

231 Запишите соотношение между данными числами с помощью знака $\sqrt{}$:

- а) $11^2 = 121$; в) $27^2 = 729$;
 б) $41^2 = 1681$; г) $108^2 = 11\,664$.

232 Найдите t , если:

- а) $\sqrt{t} = 9$; б) $\sqrt{t} = 10$; в) $\sqrt{t} = 12$; г) $\sqrt{t} = 16$.

233 ■ ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО ■ Известно, что $\sqrt{x} = m$. Какое равенство верно?

- 1) $x^2 = m^2$ 2) $x = \sqrt{m}$ 3) $x^2 = m$ 4) $x = m^2$

234 Вычислите: а) $\sqrt{17^2}$; б) $\sqrt{21^2}$; в) $\sqrt{23,8^2}$; г) $\sqrt{12,56^2}$.

235 Вычислите:

- а) $\sqrt{90\,000}$; в) $\sqrt{32\,400}$; д) $\sqrt{4\,000\,000}$;
б) $\sqrt{22\,500}$; г) $\sqrt{2\,560\,000}$; е) $\sqrt{16\,000\,000}$.

236 Вычислите:

- а) $\sqrt{25} + \sqrt{16}$; в) $\sqrt{17 + 4 \cdot 8}$; д) $\sqrt{9^2 - 17}$;
б) $\sqrt{81} - \sqrt{36}$; г) $\sqrt{5^2 + 11}$; е) $\sqrt{13^2 - 12^2}$.

Совет. Воспользуйтесь образцом, данным во фрагменте 3.

237 Найдите значение выражения при $a = 100$ и $b = 81$:

- а) $a\sqrt{b}$; б) $b\sqrt{a}$; в) $\sqrt{ab}$; г) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

238 Найдите значение каждого из выражений

$$a + \sqrt{b}, \quad \sqrt{a} + b, \quad \sqrt{a} + \sqrt{b}, \quad \sqrt{a+b}:$$

- а) при $a = 16$ и $b = 9$; б) при $a = 2,25$ и $b = 0,64$.

239 Найдите значение выражения при $a = 9$; 1 ; $\frac{1}{4}$:

- а) $a + \sqrt{a}$; б) $a - \sqrt{a}$; в) $a\sqrt{a}$; г) $\frac{a}{\sqrt{a}}$.

240 Найдите значения выражений:

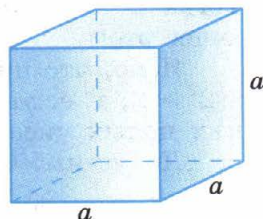
- а) $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$, $\sqrt{x^2 + y^2}$ и $\sqrt{(x+y)^2}$ при $x = 5$, $y = 12$;
б) $\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}$, $\sqrt{x^2 - y^2}$ и $\sqrt{(x-y)^2}$ при $x = 25$, $y = 24$.

241 Найдите значение выражения при заданных значениях переменных:

- а) $\sqrt{4 - 3x}$ при $x = -7$; -4 ; 0 ; 1 ;
б) $\frac{x+y}{2}$ при $x = 50$ и $y = 22$; $x = 0$ и $y = 2$.

■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ (242–243) ■

- 242** Площадь S поверхности куба с ребром a (рис. 2.1) вычисляется по формуле $S = 6a^2$. Выразите из этой формулы ребро куба a . Вычислите ребро куба, если известно, что:
а) $S = 150 \text{ см}^2$; б) $S = 13,5 \text{ дм}^2$; в) $S = 0,96 \text{ м}^2$.



■ Рис. 2.1

- 243** Объём V прямоугольного параллелепипеда, в основании которого квадрат (рис. 2.2), вычисляется по формуле $V = a^2 h$. Выразите из этой формулы сторону основания a и высоту параллелепипеда h .

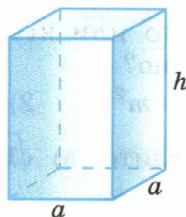


Рис. 2.2

Б

- 244** Вычислите:

а) $\sqrt{18\,225}$; б) $\sqrt{12\,544}$; в) $\sqrt{11\,025}$; г) $\sqrt{69\,696}$.

РАССУЖДАЕМ (245–246)

- 245** Упростите:

а) $\sqrt{2^{1000}}$; б) $\sqrt{3^{-50}}$; в) $\sqrt{7^{500}}$; г) $\sqrt{5^{-100}}$.

Образец. $\sqrt{15^{40}} = \sqrt{(15^{20})^2} = 15^{20}$.

- 246** Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{\sqrt{81}}$; б) $\sqrt{\sqrt{625}}$; в) $\sqrt{11 + \sqrt{25}}$; г) $\sqrt{\sqrt{49} - \sqrt{36}}$.

2.2 Иррациональные числа

- 1** Возьмём квадрат со стороной, равной 1, и на его диагонали построим ещё один квадрат (рис. 2.3). Из рисунка видно, что площадь нового квадрата в два раза больше площади исходного, т. е. она равна 2 кв. ед. А чему равна длина стороны этого квадрата?

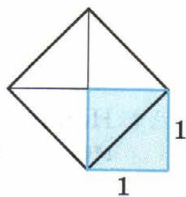


Рис. 2.3

Обозначим длину стороны квадрата буквой a . Тогда $a^2 = 2$. Попробуем найти число, удовлетворяющее этому условию.

Ясно, что число a не может быть целым. В самом деле, $1^2 < 2$, а $2^2 > 2$, т. е. это число должно быть заключено между 1 и 2, а таких целых чисел нет.

Допустим, что a — дробное число. Тогда его можно записать в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$, знаменатель которой не равен 1. Числа p и q не имеют общих делителей, отличных от 1, иначе дробь $\frac{p}{q}$

можно было бы сократить. Но тогда и числа p^2 и q^2 также не имеют общих делителей, а значит, дробь $\frac{p^2}{q^2}$ также является несократимой, причём её знаменатель не равен 1.

Однако несократимая дробь со знаменателем, не равным 1, не может быть равна целому числу 2, и мы, как говорят математики, пришли к противоречию. Таким образом,

■ нет ни целого, ни дробного числа, квадрат которого равен 2.

Более двадцати веков тому назад к этому выводу пришли математики Древней Греции, что вызвало кризис в математической науке: сторона у квадрата есть, а длины у неё нет! Но математики нашли выход и из этой ситуации: раз имеющегося запаса чисел — целых и дробных — не хватает для выражения длин отрезков, значит, нужны какие-то новые числа.

Так появились новые числа, а называли их *иррациональными*. Латинская приставка *ir-* означает отрицание: это числа, не являющиеся рациональными. И длина стороны квадрата, площадь которого равна 2, выражается иррациональным числом. Используя формулу $a = \sqrt{S}$, можно записать, что $a = \sqrt{2}$.

Число 2 не единственное рациональное число, которое нельзя представить ни в виде квадрата целого, ни в виде квадрата дробного числа. Чисел, обладающих таким же свойством, очень много даже среди натуральных. Все их можно получить, если из натурального ряда

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...

исключить квадраты целых чисел. Тогда останутся числа

2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, ... ,

при извлечении квадратных корней из которых получаются иррациональные числа:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \dots$$

Квадраты этих чисел соответственно равны 2, 3, 5, 6, ... , т. е.

$$(\sqrt{2})^2 = 2, (\sqrt{3})^2 = 3, (\sqrt{5})^2 = 5, (\sqrt{6})^2 = 6, \dots$$

И вообще если положительное число a не является квадратом натурального или дробного числа, то $\sqrt{a}$ — число иррациональное.

2 Число $\sqrt{2}$ — это *точное значение* длины стороны квадрата, площадь которого равна 2. В то же время на практике измерения проводятся приближённо с требуемой точностью и иррациональные квадратные корни заменяют их *десятичными приближениями*.

Так, из рисунка 2.4 видно, что сторона чёрного квадрата приблизительно равна 1,4. Выполним для проверки возведение в квадрат: $1,4^2 = 1,96$. Мы, естественно, получили результат, отличающийся от числа 2, хотя и близкий к нему.

Существуют разные способы приближённого вычисления квадратных корней. Рассмотрим один из них. В его основу положено следующее утверждение: *если числа a и b положительные и $a^2 < b^2$, то $a < b$* . С геометрической точки зрения это очевидно: квадрат с меньшей площадью имеет и меньшую сторону.

Возьмём, например, $\sqrt{42}$. Так как

$$6^2 < 42 < 7^2, \text{ то } 6 < \sqrt{42} < 7.$$

Можно сказать, что $\sqrt{42} \approx 6$ (с недостатком) или что $\sqrt{42} \approx 7$ (с избытком).

Чтобы получить более точные приближения, будем последовательно возводить в квадрат числа 6,1; 6,2; 6,3; ..., пока не получим число, большее 42:

$$6,1^2 = 37,21; 6,2^2 = 38,44; 6,3^2 = 39,69;$$

$$6,4^2 = 40,96; 6,5^2 = 42,25.$$

Так как $6,4^2 < 42 < 6,5^2$, то $6,4 < \sqrt{42} < 6,5$.

Значит, можно считать, что $\sqrt{42} \approx 6,4$ (с недостатком) или что $\sqrt{42} \approx 6,5$ (с избытком).

Продолжая оценку числа $\sqrt{42}$, мы будем получать всё более и более точные его приближения:

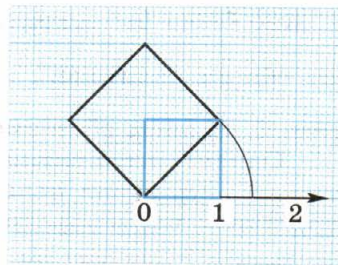
$$6,48 < \sqrt{42} < 6,49,$$

$$6,480 < \sqrt{42} < 6,481,$$

$$6,4807 < \sqrt{42} < 6,4808 \text{ и т. д.}$$

Этот процесс бесконечен: хотя приближения слева и справа всё ближе и ближе «подкрадываются» к $\sqrt{42}$, никакое из них с этим числом не совпадет — в противном случае число $\sqrt{42}$ оказалось бы рациональным.

На практике для нахождения приближённого значения корня вы можете пользоваться калькулятором, на котором есть кнопка со знаком $\sqrt{}$. Если у вас восьмиразрядный калькулятор, то, вычис-



■ Рис. 2.4

для $\sqrt{42}$, вы получите один из результатов: 6,4807406 или 6,4807407. Какой именно — зависит от калькулятора.

3 Иррациональные числа появляются не только в связи с извлечением квадратных корней. Существует бесконечно много иррациональных чисел и другого происхождения. Например, вы встречались с формулами длины окружности и площади круга: $c = \pi d$, $S = \pi r^2$, в которых используется число π . Оно выражает отношение длины любой окружности к её диаметру. Число π тоже иррациональное. Недаром поэтому, работая с данными формулами, вы всегда пользовались приближёнными равенствами $\pi \approx 3$ или $\pi \approx 3,14$. Архимед, живший в III в. до н. э. — за полторы тысячи лет до того, как голландский математик Симон Стевин ввёл современные обозначения для десятичных дробей, позволяющие записать, что $\pi \approx 3,14$, нашёл хорошее приближение числа π с помощью обыкновенной дроби: $\pi \approx \frac{22}{7}$. Заметьте, что если записать десятичное приближение дроби $\frac{22}{7}$ с двумя знаками после запятой, то как раз и получится число 3,14.

4 Иррациональные числа, так же как и рациональные, могут быть и отрицательными. Отрицательное число получается из соответствующего положительного числа приписыванием к нему знака «минус», например $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{42}$.

Всякое иррациональное число, как и любое рациональное, можно изобразить точкой на координатной прямой. На рисунке 2.5 показано примерное расположение точек, соответствующих числам π , $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{42}$.

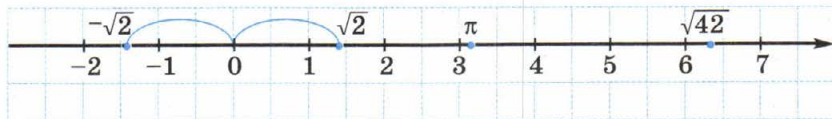


Рис. 2.5

Рациональные и иррациональные числа вместе образуют так называемое *множество действительных чисел*. С действительными числами можно выполнять арифметические действия — сложение, вычитание, умножение и деление. При этом остаются верными все свойства арифметических действий — оба переместительных, оба сочетательных и распределительное.

- Постройте квадрат со стороной, равной 1, и на его диагонали как на стороне постройте ещё один квадрат. Чему равна площадь нового квадрата? длина стороны этого квадрата?
- Приведите примеры натуральных чисел, которые нельзя представить в виде квадрата рационального числа. Для каждого из них запишите число, квадратом которого оно является.
- Приведите пример иррационального числа. Что означает приставка *ir*-?
- Найдите в тексте неравенства, дающие оценку $\sqrt{42}$ с недостатком и с избытком (фрагмент 2). Запишите десятичные приближения этого числа с недостатком и с избытком с двумя, тремя, четырьмя и пятью знаками после запятой.
- Покажите на координатной прямой примерное расположение числа $\sqrt{5}$ и числа, ему противоположного.

A

- 247** Укажите, рациональным или иррациональным является число:
а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{25}$; в) $\sqrt{37}$; г) $2\sqrt{16}$; д) $\frac{1}{2}\sqrt{49}$.
- 248** а) Квадратом какого положительного числа является число: 4; 8; 25; 29; a ($a > 0$)?
б) Представьте в виде квадрата некоторого числа все натуральные числа от 11 до 20.
- 249** Между какими последовательными целыми числами заключено число:
а) $\sqrt{8}$; б) $\sqrt{15}$; в) $\sqrt{27}$; г) $\sqrt{150}$; д) $\sqrt{200}$; е) $\sqrt{480}$?
- 250** Найдите с помощью калькулятора десятичное приближение квадратного корня с двумя знаками после запятой:
а) $\sqrt{508}$; б) $\sqrt{617}$.
Возведите полученное число в квадрат. Получилось ли в результате число, близкое к стоящему под знаком корня?
- 251** ■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ ■ Площадь квадрата равна 10 см^2 . Чему равна его сторона? Дайте точный ответ, записав его с помощью знака $\sqrt{\quad}$, и приближённый, выразив результат десятичной дробью с двумя знаками после запятой. Начертите квадрат, площадь которого примерно равна 10 см^2 .
- 252** С помощью калькулятора найдите значения $\sqrt{n}$ для всех натуральных n от 1 до 20. Заполните таблицу, указывая приближённые значения $\sqrt{n}$ с тремя знаками после запятой.

n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$
1	1	6		11		16	
2	1,414	7		12		17	
3		8		13		18	
4		9		14		19	
5		10		15		20	

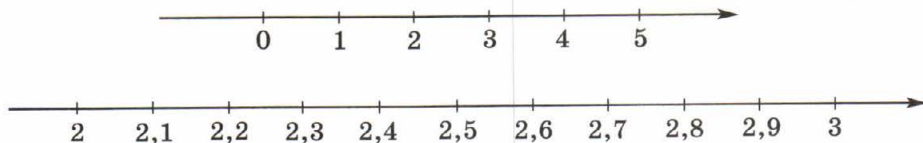
253 ■ АНАЛИЗИРУЕМ ■ Пользуясь таблицей (см. упражнение 252), сравните: $\sqrt{8}$ и $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$ и $\sqrt{17}$, $\sqrt{19}$ и $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$ и $\sqrt{7}$. Как меняются значения $\sqrt{n}$ с увеличением n ?

254 Что больше: $\sqrt{80}$ или $\sqrt{90}$; $\sqrt{168}$ или $\sqrt{104}$? Проверьте себя с помощью калькулятора.

255 Покажите на координатной прямой примерное расположение чисел $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., $\sqrt{20}$. (За единичный отрезок примите 5 клеток.)

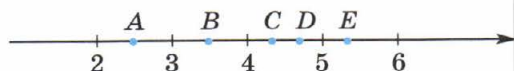
256 Покажите на координатной прямой примерное расположение чисел $\sqrt{3}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{12}$, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{8}$, $-\sqrt{12}$.

257 На каждом рисунке (рис. 2.6) укажите отрезок между двумя соседними делениями, которому принадлежит число: $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$.



■ Рис. 2.6

258 а) Каждое из чисел $\sqrt{12}$, $\sqrt{19}$, $\sqrt{28}$ соотнесите с соответствующей ему точкой координатной прямой (рис. 2.7).



■ Рис. 2.7

б) На координатной прямой (рис. 2.8) точками K и L отмечены два из следующих чисел: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{0,4}$. Какое число соответствует точке K и какое — точке L ?

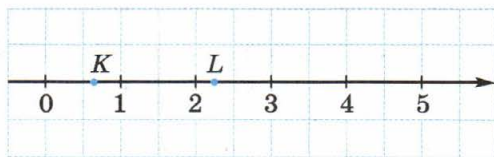


Рис. 2.8

РАССУЖДАЕМ (259–260)

259 Сравните числа:

$\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}$ и $-\sqrt{3}$, $1-\sqrt{2}$ и $1-\sqrt{3}$.

260 Положительным или отрицательным является число:

а) $1-\sqrt{5}$; в) $\sqrt{12}-\sqrt{17}$; д) $\sqrt{7}-3$;

б) $5-\sqrt{10}$; г) $\sqrt{6}-\sqrt{5}$; е) $\sqrt{8}-2$?

261 ■ **РАЗБИРАЕМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ** ■ Не используя калькулятор, сравните:

а) 3 и $\sqrt{11}$; в) 11 и $\sqrt{110}$; д) 22 и $\sqrt{484}$;

б) 5 и $\sqrt{20}$; г) 17 и $\sqrt{299}$; е) 35 и $\sqrt{1215}$.

Образец. Сравним 4 и $\sqrt{15}$.

Способ 1. Представим число 4 в виде корня: $4 = \sqrt{16}$.

Так как $\sqrt{16} > \sqrt{15}$, то $4 > \sqrt{15}$.

Способ 2. Сравним квадраты чисел 4 и $\sqrt{15}$:

$$4^2 = 16 \text{ и } (\sqrt{15})^2 = 15.$$

Так как $4^2 > (\sqrt{15})^2$, то $4 > \sqrt{15}$.

262 Найдите площадь фигуры (рис. 2.9, а–г).

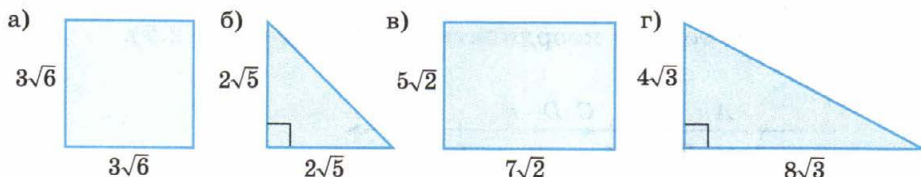


Рис. 2.9

263 Упростите:

- а) $(\sqrt{18})^2$; в) $3\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}$;
б) $(\sqrt{23})^2$; г) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{2}$.

ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ (264–265)

264 а) Площадь S круга с радиусом r (рис. 2.10) вычисляется по формуле $S = \pi r^2$. Выразите из этой формулы радиус r .

б) Запишите формулу для вычисления площади круга S по его диаметру d . Выразите из этой формулы диаметр d .

265 а) Площадь S равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом a (рис. 2.11) вычисляется по формуле $S = \frac{a^2}{2}$. Выразите

из этой формулы катет a . Какой должна быть длина катета, чтобы площадь треугольника была равна 10 см^2 ? (Ответ дайте приближённо с одним знаком после запятой.)

б) Сколько секунд будет падать сосулька с крыши 22-этажного дома, примерная высота которого 68 м? (Для вычислений воспользуйтесь формулой $h = \frac{gt^2}{2}$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, g — ускорение свободного падения, примерно равное $9,8 \text{ м/с}^2$.)

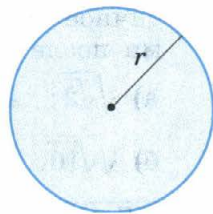


Рис. 2.10

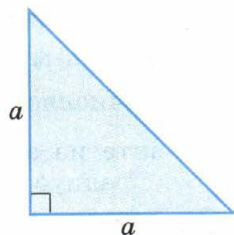


Рис. 2.11

Б

РАССУЖДАЕМ (266–269)

266 Не используя калькулятор, найдите ближайшее к указанному числу натуральное число:

- а) $\sqrt{50}$; б) $\sqrt{22}$; в) $\sqrt{9,2}$; г) $\sqrt{33,7}$; д) $\sqrt{80,02}$.

267 Найдите два натуральных числа, между которыми заключено указанное число, и определите, к какому из них оно ближе:

- а) $\sqrt{73,25}$; б) $\sqrt{20,42}$.

268 Укажите какое-нибудь рациональное число, заключённое между числами:

- а) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$; в) $\sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$; г) 1 и $\sqrt{2}$.

269 Найдите с помощью калькулятора десятичное приближение числа с двумя знаками после запятой:

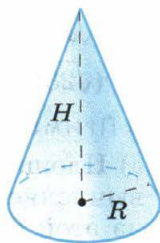
- а) $\sqrt{2}$; в) $0,5\sqrt{8}$; д) $\sqrt{3+\sqrt{3}}$;
 б) $\sqrt{\sqrt{10}}$; г) $\sqrt{0,9\sqrt{2}}$; е) $\sqrt{\sqrt{15}-3}$.

270 ■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ ■ а) Объём V конуса (рис. 2.12) вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$. Выразите из этой формулы высоту H и радиус основания R .

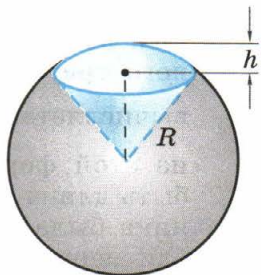
б) Объём V шарового сектора (рис. 2.13) вычисляется по формуле $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$. Выразите из этой формулы высоту сегмента h и радиус шара R .

271 ■ ИССЛЕДУЕМ ■ Когда вы находите перебором все делители некоторого натурального числа, удобно выписывать пары: делитель и соответствующее частное, которое также является делителем.

- 1) Пользуясь этим приёмом, найдите все делители числа: 18; 36; 50.
- 2) Приведите пример натурального числа a , делителем которого является число $\sqrt{a}$.
- 3) Докажите, что если один из пары делителей натурального числа a меньше $\sqrt{a}$, то другой больше $\sqrt{a}$.
- 4) Перебором каких натуральных чисел можно ограничиться для нахождения всех делителей числа a ? До какого числа следует осуществить перебор для нахождения всех делителей числа: 144; 238?



■ Рис. 2.12



■ Рис. 2.13

2.3 Теорема Пифагора

1 Теорема Пифагора — одно из самых знаменитых положений геометрии. Хотя она и названа именем великого древнегреческого математика и философа, жившего более 25 веков тому назад, история её началась задолго до самого Пифагора. Известно, что эта теорема в той или иной форме использовалась всеми древними народами.

Речь в теореме Пифагора идёт о соотношении между сторонами прямоугольного треугольника. В современной формулировке она звучит так:

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (рис. 2.14).

Убедиться в справедливости этого утверждения можно с помощью рисунка 2.15.

Четыре равных прямоугольных треугольника с катетами a и b и гипотенузой c расположены так, что их стороны образуют два квадрата: большой квадрат со стороной $a + b$ и малый квадрат со стороной c . Из рисунка ясно, что

$$c^2 = (a + b)^2 - 4 \cdot \frac{ab}{2}.$$

Так как

$$(a + b)^2 - 4 \cdot \frac{ab}{2} = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2,$$

то

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Пример 1. Найдём гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого равны 3 и 4.

Из формулы $c^2 = a^2 + b^2$ выразим гипотенузу c :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Подставив значения a и b , получим

$$c = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Таким образом, если катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4, то его гипотенуза равна 5.

Прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5 использовался для построения прямого угла ещё в Древнем Египте (рис. 2.16), поэтому его называют *египетским треугольником*.

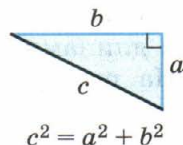
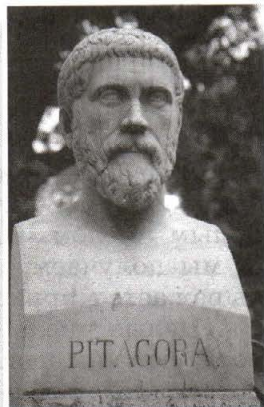


Рис. 2.14

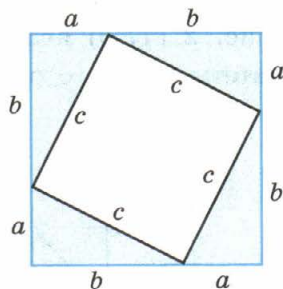


Рис. 2.15

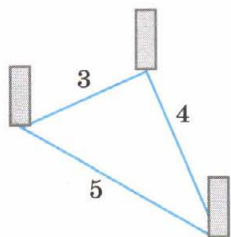


Рис. 2.16

Пример 2. Найдём гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого равны 2 и 4.

Подставив в формулу $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ значения a и b , будем иметь $c = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$.

В первом примере, задавшись целыми значениями длин катетов a и b , мы получили, что длина гипотенузы также выражается целым числом. Однако чаще, выбрав целые значения катетов a и b , мы получаем, как это было в примере 2, что длина гипотенузы выражается иррациональным числом.

Целые числа 3, 4 и 5, удовлетворяющие условию $a^2 + b^2 = c^2$, образуют так называемую «пифагорову тройку». Вот ещё примеры троек чисел, обладающих этим свойством: 5, 12 и 13; 6, 8 и 10. «Пифагоровых троек» бесконечно много, но найти их не так просто.

2 Теорему Пифагора можно использовать для построения отрезков с длинами, равными $\sqrt{n}$, где n — любое натуральное число.

На рисунке 2.17, а построен равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, равными 1. Длина его гипотенузы OA равна $\sqrt{2}$. Действительно, $OA = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

На рисунке 2.17, б соответствующая точка нанесена на координатную прямую.

Теперь легко отметить точку с координатой $\sqrt{3}$: отрезок OB (рис. 2.17, б) является гипотенузой прямоугольного треугольника, катеты которого равны $\sqrt{2}$ и 1. Поэтому $OB = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3}$.

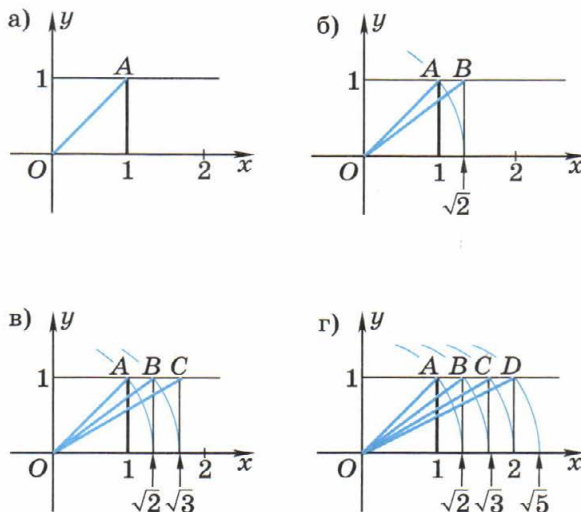


Рис. 2.17

На рисунке 2.17, в точка с координатой $\sqrt{3}$ нанесена на координатную прямую.

Далее, отрезок OC — гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами $\sqrt{3}$ и 1 (рис. 2.17, в). Поэтому

$$OC = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2.$$

Затем строим точку с координатой $\sqrt{5}$ (рис. 2.17, г):

$$OD = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}.$$

Следующим шагом будет построение точки с координатой $\sqrt{6}$, а затем с координатой $\sqrt{7}$, и т. д.

- Сформулируйте теорему Пифагора и запишите это утверждение в виде формулы. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого равны 2 и 5.
- Найдите в тексте разъяснение термина «пифагорова тройка» (фрагмент 1). Покажите, что тройка чисел 20, 21 и 29 образует «пифагорову тройку».
- Разберите способ построения отрезков с длинами, равными $\sqrt{n}$, где n — натуральное число (фрагмент 2). Постройте этим способом отрезок длиной $\sqrt{5}$ см.

A

272 Найдите сторону прямоугольного треугольника, обозначенную буквой (рис. 2.18, а, б). Если результат выражается иррациональным числом, то дайте два ответа: точное значение и приближённое, округлив его до сотых.

273 Велосипедист проехал из пункта M в пункт N по улицам (рис. 2.19). Какое расстояние он проехал? Если бы можно было проехать напрямик, то на сколько короче оказался бы его путь?

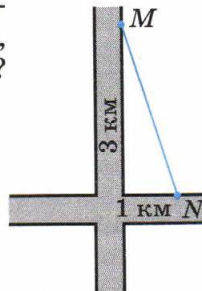
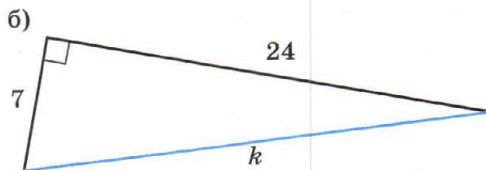
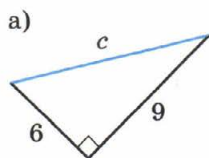


Рис. 2.18

Рис. 2.19

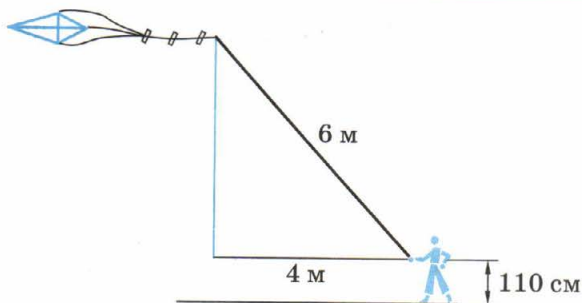


Рис. 2.20

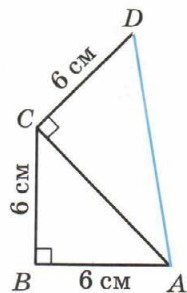


Рис. 2.21

274 На какой высоте находится воздушный змей (рис. 2.20)?

275 Найдите длину отрезка AD (рис. 2.21).

ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ (276–280) ■ Сделайте рисунок и решите задачу. Если в ответе получается иррациональное число, то дайте его десятичное приближение с одним знаком после запятой.

- 276** Основание лестницы находится в 2 м от стены, длина лестницы 5 м. На каком расстоянии от земли находится верхний конец лестницы?
- 277** Сквер в форме прямоугольника имеет длину 15 м и ширину 9 м. Какова длина прямой дорожки, пересекающей сквер по его диагонали?
- 278** Какова наибольшая длина трости, которую можно положить на дно чемодана размером 80×60 см?
- 279** Диагональ телевизионного экрана 50 см, длины его сторон относятся как 3 : 4. Чему равны длины сторон экрана?
- 280** Найдите диагональ квадрата, если его площадь равна:
а) 25 см^2 ; б) 30 см^2 .

Б

- 281** Группа туристов прошла от своего лагеря 1,6 км строго на запад, затем 3,2 км на север, а затем несколько километров на восток и остановилась на ночлег. Точка ночлега находилась в 6,4 км от их лагеря. Сколько километров туристы шли в восточном направлении?
- 282** Квадрат, площадь которого равна 36 см^2 , вписан в круг (рис. 2.22). Найдите радиус круга.

283 ■ ИЩЕМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ■ На координатной плоскости отмечены точки A и B . Найдите расстояние между этими точками, если известны их координаты (сделайте рисунок):

- 1) $A(1; 8)$, $B(7; 0)$;
- 2) $A(1; 3)$, $B(13; 8)$;
- 3) $A(80; 54)$, $B(83; 50)$.

284 ■ ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ ■ Можно ли трость длиной 100 см поместить в коробку, длина которой 80 см, ширина 30 см и высота 50 см?

■ РАССУЖДАЕМ (285–286) ■

285 Прямоугольный параллелепипед имеет измерения a , b и c (рис. 2.23).

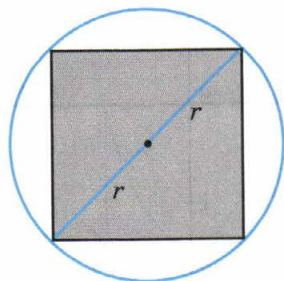
- а) Выразите диагональ d прямоугольного параллелепипеда через его измерения.
- б) Используя полученную формулу, вычислите d , если $a = 3$ см, $b = 4$ см, $c = 12$ см.
- в) Выразите из полученной формулы ребро c . Найдите c , если $d = 17$ см, $a = 9$ см, $b = 12$ см.

286 а) Убедитесь, что $\sqrt{3^2 + 4^2} \neq 3 + 4$. Покажите геометрически, что если a и b — положительные числа, то $\sqrt{a^2 + b^2} < a + b$.

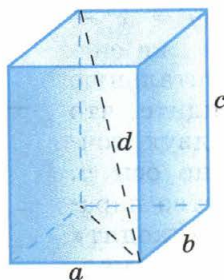
б) Покажите геометрически, что если a , b и c — положительные числа, то $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} < a + b + c$.

287 ■ ИССЛЕДУЕМ ■ На рисунке 2.24 шесть отрезков имеют длину, равную 1.

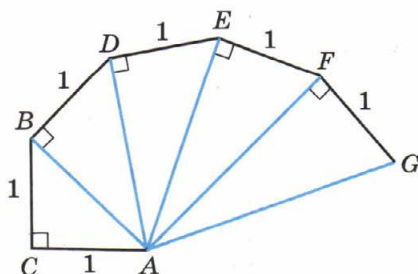
- 1) Найдите длины отрезков AB , AD , AE , AF , AG .
- 2) Постройте такую же фигуру в тетради и достройте её так, чтобы получить отрезок длиной $\sqrt{8}$.



■ Рис. 2.22



■ Рис. 2.23



■ Рис. 2.24

3) Отрезки длиной $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$ можно получить, продолжив построение этой фигуры. Но для этих длин можно применить и более простой приём. Догадайтесь какой и постройте отрезки с указанными длинами.

2.4 Квадратный корень (алгебраический подход)

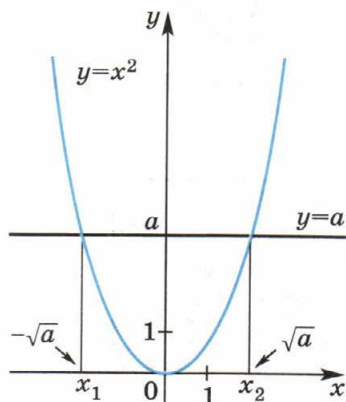
1 Пусть площадь квадрата равна 36 см^2 . Чему равна его сторона? Если длину стороны этого квадрата (в сантиметрах) обозначить через x , то можно записать уравнение $x^2 = 36$. В соответствии со смыслом задачи ответом может служить только положительный корень уравнения, т. е. число 6. Однако уравнению $x^2 = 36$ вместе с числом 6 удовлетворяет и число -6 . В самом деле, $(-6)^2 = 36$. Оба корня уравнения $x^2 = 36$, т. е. числа 6 и -6 , квадраты которых равны 36, называют *квадратными корнями* из 36.

Уравнение, которое мы рассмотрели, имеет вид $x^2 = a$, где x — переменная, a — некоторое число. Всякое число, являющееся корнем такого уравнения, называют *квадратным корнем* из числа a . Иными словами,

■ число b называют квадратным корнем из числа a , если $b^2 = a$.

2 Для a , равного 36, мы указали два квадратных корня — числа 6 и -6 . А как обстоит дело в общем случае: для любого ли числа a можно найти квадратный корень и сколько квадратных корней существует из произвольно взятого числа a ? Чтобы выяснить это, рассмотрим случаи, когда $a > 0$, $a = 0$ и $a < 0$.

Пусть $a > 0$. Будем рассуждать с опорой на график. Построим в координатной плоскости график зависимости $y = x^2$ — знакомую вам параболу, и в этой же системе координат проведём горизонтальную прямую $y = a$ (рис. 2.25). Вы видите, что прямая пересекает параболу в двух точках, симметричных относительно оси y . (Рисунок отражает важное свойство параболы: её ветви неограниченно «уходят» вверх, и любая горизонтальная прямая, расположенная выше оси x , пересекает параболу в двух точках.) Ордината каж-



■ Рис. 2.25

дой точки пересечения параболы и прямой равна a . Обозначим абсциссы этих точек через x_1 и x_2 . Так как точки принадлежат параболе $y = x^2$, то верны равенства $x_1^2 = a$ и $x_2^2 = a$. Но в соответствии с определением квадратного корня это как раз и означает, что числа x_1 и x_2 являются квадратными корнями из числа a .

Таким образом, если a — положительное число, то существуют два квадратных корня из a . Эти квадратные корни — числа противоположные, т. е. они равны по модулю, и один из них положителен, а другой отрицателен. Мы уже имеем для них обозначения: $\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$.

Пусть $a = 0$. Вы знаете, что есть только одно число, квадрат которого равен 0, — это само число 0. Таким образом, квадратный корень из нуля единственный, и он равен 0.

Рассмотрим случай, когда $a < 0$. Как известно, квадрат любого числа неотрицателен (т. е. он либо положителен, либо равен 0). Иными словами, нет такого числа, квадрат которого был бы равен отрицательному числу. Таким образом, квадратный корень из отрицательного числа не существует.

Итак, извлечь квадратный корень из числа a можно при условии, что $a \geq 0$. Если $a > 0$, то квадратных корней два; один из них положителен, а другой отрицателен. Если $a = 0$, то квадратный корень единственный, и он равен 0.

Неотрицательный квадратный корень из числа a (т. е. положительный или равный 0) называют арифметическим квадратным корнем из числа a .

Именно арифметический квадратный корень из числа a обозначают символом $\sqrt{a}$. Для краткости прилагательное «арифметический» часто опускают и называют выражение $\sqrt{a}$ просто квадратным корнем. При этом, однако, надо помнить, что $\sqrt{a}$ — число неотрицательное. Поэтому

равенство $\sqrt{a} = b$ означает одновременное выполнение двух условий: $b^2 = a$ и $b \geq 0$.

3 Результаты, которые мы получили, исследуя вопрос о квадратных корнях из произвольного числа a , можно сформулировать иначе, рассматривая их по отношению к уравнению $x^2 = a$.

Если $a > 0$, то уравнение $x^2 = a$ имеет два корня: $\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$; если $a = 0$, то уравнение $x^2 = a$ имеет единственный корень — число 0;

если $a < 0$, то уравнение $x^2 = a$ корней не имеет.

Нельзя не обратить внимания и на совпадение в терминах — квадратный корень (иначе — радикал) и корень уравнения. Это совпадение не случайно. Уравнения вида $x^2 = a$ исторически были первыми «сложными» уравнениями, и их решения были названы корнями, возможно, по метафоре, что из стороны квадрата как из корня вырастает сам квадрат. Этот термин стал употребляться в дальнейшем и для произвольных уравнений. Название «радикал» тоже связано с термином «корень»: как уже говорилось выше, латыни «корень» — *radix* (он же «редис» — корнеплод). Заметьте также, что слово «радикальный» в русском языке является синонимом слова «коренной».

- Какое число называют квадратным корнем из числа a ? Сколько существует квадратных корней из числа a , если $a > 0$? Как они обозначаются? Найдите квадратные корни из a , если $a = 9$; 7 .
- Чему равен квадратный корень из числа 0 ? Объясните, почему не существует квадратного корня из отрицательного числа.
- а) Как называют неотрицательный квадратный корень из числа a ? Как его обозначают? б) Как проверить, что верно равенство вида $\sqrt{a} = b$? Есть ли среди следующих равенств верные: $\sqrt{2,5} = 0,5$; $\sqrt{0,36} = 0,6$; $\sqrt{0,01} = -0,1$?
- а) Перечертите таблицу в тетрадь и заполните её (фрагмент 3).

Значение a	Корни уравнения $x^2 = a$
$a > 0$	
$a = 0$	
$a < 0$	

б) Приведите пример уравнения вида $x^2 = a$, имеющего два корня; не имеющего корней.

A

- 288** Точка D на рисунке 2.26 имеет координаты $(\sqrt{5}; 5)$. Запишите координаты точек графика, отмеченных на рисунке.
- 289** Найдите квадратные корни из заданных чисел и в каждом случае назовите арифметический корень:
- а) 16 ; 100 ; 10 ; 18 ; 83 ;
 - б) $0,01$; $0,25$; $5,6$; $6,4$;
 - в) $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{3}$; $2\frac{1}{4}$; $2\frac{7}{9}$.

290 Какие из следующих выражений не имеют смысла: $\sqrt{27}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{0}$, $\sqrt{-8}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{1,6}$?

291 При каких значениях a имеет смысл выражение:

- а) $\sqrt{a}$; в) $\sqrt{3a}$;
б) $\sqrt{-a}$; г) $\sqrt{-3a}$?

Решите уравнение (292—294).

- 292** а) $x^2 = 25$; д) $z^2 = 1$;
б) $x^2 = 16$; е) $y^2 = 0$;
в) $y^2 = 36$; ж) $t^2 = \frac{1}{4}$;
г) $z^2 = 0,81$; з) $x^2 = \frac{9}{16}$.

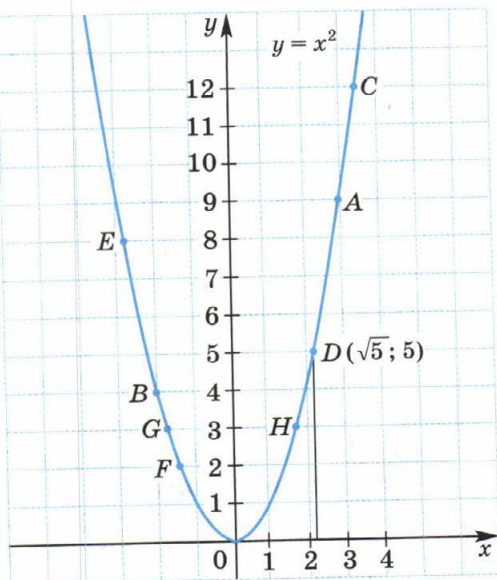


Рис. 2.26

- 293** а) $x^2 = 3$; в) $x^2 = 11$; д) $x^2 = 8$;
б) $x^2 = 7$; г) $x^2 = 12$; е) $x^2 = 72$.
294 а) $x^2 - 25 = 0$; в) $4y^2 = 9$; д) $2x^2 - 4 = 0$;
б) $x^2 + 4 = 0$; г) $25x^2 = 1$; е) $2x^2 + 6 = 0$.

295 Составьте какое-нибудь уравнение, имеющее корни:
а) 3 и -3; б) 0,2 и -0,2; в) $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$.

296 ■ АНАЛИЗИРУЕМ ■ Даны уравнения:

$$x^2 = 3, x^2 = -144, x^2 = \frac{4}{9}, x^2 = 144, x^2 = 0, x^2 = -3.$$

Выберите из них те, которые:

- а) имеют два корня;
б) имеют два рациональных корня;
в) имеют два иррациональных корня;
г) имеют один корень;
д) не имеют корней.

297 Найдите x , если:

а) $\frac{x}{18} = \frac{2}{x}$; б) $\frac{5}{x} = \frac{x}{2}$; в) $\frac{x}{50} = \frac{0,5}{x}$; г) $\frac{0,3}{x} = \frac{x}{10}$.

Подсказка. Примените основное свойство пропорции.

298 Решите уравнение:

- а) $(x+1)^2 = 16$; г) $(2x-1)^2 = 4$;
 б) $(x-1)^2 = 0$; д) $(3x+6)^2 = 100$;
 в) $(x-5)^2 = 1$; е) $(3-2x)^2 = 25$.

Образец. $(x+3)^2 = 9$;

$$x+3=3 \text{ или } x+3=-3;$$

$$x=0, \quad x=-6.$$

Ответ. 0; -6.

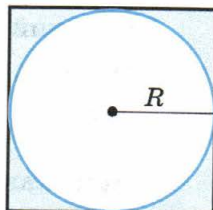


Рис. 2.27

ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ (299–300)

- 299** а) Составьте формулу для вычисления площади S закрашенной фигуры (рис. 2.27). Выразите из этой формулы радиус круга.
 б) Составьте формулу для вычисления площади S закрашенной фигуры (рис. 2.28). Выразите из этой формулы радиус большого круга и радиус маленького круга.

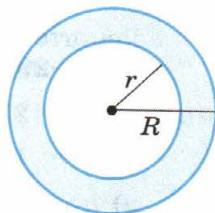


Рис. 2.28

300 Из формулы:

- а) $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ выразите l ; в) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ выразите l ;
 б) $\omega = \sqrt{\frac{t}{n}}$ выразите t ; г) $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ выразите L .

Б

301 Найдите приближённо с одним знаком после запятой корни уравнения:

- а) $x^2 = 82$; в) $x^2 - 5,7 = 0$; д) $300 = 2x^2$;
 б) $x^2 = 363$; г) $x^2 - 12,2 = 0$; е) $4x^2 = 500$.

302 Найдите корни уравнения и сделайте проверку, подставив их в уравнение:

- а) $(x-4)^2 = 2$; б) $(x+1)^2 = 3$; в) $(2-x)^2 = 5$.

303 Решите уравнение:

- а) $x^2 = 2$; г) $1 - x^2 = 2$;
 б) $(x-1)^2 = 2$; д) $1 + x^2 = 2$.
 в) $x^2 - 1 = 2$;

304 Решите уравнение:

а) $2(x-2)^2 = 8$; в) $3(x-5)^2 = 6$; д) $\frac{2}{5}(x-10)^2 = \frac{4}{5}$;
 б) $\frac{1}{3}(1-x)^2 = \frac{1}{3}$; г) $10(x-3)^2 = 10$; е) $\frac{(x-1)^2}{3} = \frac{16}{3}$.

305 ■ РАЗБИРАЕМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ■ Известно, что $a^2 + b^2 = 41$ и $ab = 20$. Найдём $a + b$. Чтобы решить задачу, умножим обе части второго равенства на 2, получим $2ab = 40$. Сложив это равенство с первым, получим

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + 2ab &= 40 + 41, \\ (a + b)^2 &= 81, \\ a + b &= 9 \text{ или } a + b = -9. \end{aligned}$$

Пользуясь рассмотренным приёмом, найдите:

- а) положительное значение суммы $a + b$, если $a^2 + b^2 = 82$ и $ab = 9$;
 б) значения разности $a - b$, если $a^2 + b^2 = 106$ и $ab = 45$;
 в) отрицательное значение разности $a - b$, если $a^2 + b^2 = 72$ и $ab = 18$;
 г) значения суммы $a + b$, если $(a - b)^2 = 5$ и $ab = 1$;
 д) положительное значение разности $a - b$, если $a + b = 8$ и $a^2 + b^2 = 40$.

306 Представьте в виде квадрата некоторого числа: а) $\sqrt{10}$; б) $2\sqrt{2}$.

307 Упростите:

а) $(\sqrt{8})^2$; б) $(\sqrt{2\sqrt{3}})^2$; в) $(\sqrt{\sqrt{5}})^4$; г) $(\sqrt{3\sqrt{2}})^4$.

2.5 График зависимости $y = \sqrt{x}$

1 Построим в координатной плоскости график зависимости, которая задаётся равенством $y = \sqrt{x}$. Для этого сначала составим таблицу соответственных значений x и y . В качестве значений x , естественно, будем брать только положительные числа и 0, так как при отрицательных x выражение $\sqrt{x}$ смысла не имеет.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	1	1,4	1,7	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2

Отметим в координатной плоскости точки, координаты которых указаны в таблице, и проведём через них от начала координат

нат плавную линию. Построенная линия — график зависимости $y = \sqrt{x}$ (рис. 2.29).

- 2 График зависимости $y = \sqrt{x}$ — ветвь графика зависимости $y = x^2$, но только расположенного горизонтально. Это является следствием того, что графики зависимостей $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$, где $x \geq 0$, симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 2.30).

Доказательство симметрии этих графиков основано на симметрии относительно прямой $y = x$ точек $(a; b)$ и $(b; a)$, координаты которых различаются только порядком. Возьмём какую-нибудь точку, принадлежащую параболе $y = x^2$, где $x \geq 0$, например точку $M(a; b)$. Симметричной ей относительно прямой $y = x$ будет точка $N(b; a)$. Так как точка $M(a; b)$ принадлежит правой ветви параболы $y = x^2$, то a и b — числа неотрицательные и $b = a^2$. Но тогда по определению арифметического квадратного корня $a = \sqrt{b}$, и, значит, координаты точки $N(b; a)$ удовлетворяют равенству $y = \sqrt{x}$, т. е. эта точка принадлежит графику зависимости $y = \sqrt{x}$.

Таким образом, каждой точке параболы $y = x^2$, где $x \geq 0$, соответствует симметричная ей относительно прямой $y = x$ точка графика зависимости $y = \sqrt{x}$. Верно и обратное: каждой точке графика зависимости $y = \sqrt{x}$ соответствует симметричная ей относительно прямой $y = x$ точка параболы $y = x^2$, где $x \geq 0$. И мы приходим к выводу о том, что графики зависимостей $y = x^2$, где $x \geq 0$, и $y = \sqrt{x}$ симметричны относительно прямой $y = x$.

- 3 Отметим некоторые свойства графика зависимости $y = \sqrt{x}$.

1. График целиком расположен в первой координатной четверти, причём начало координат принадлежит графику.
2. Ось y является касательной к графику в точке $O(0; 0)$.

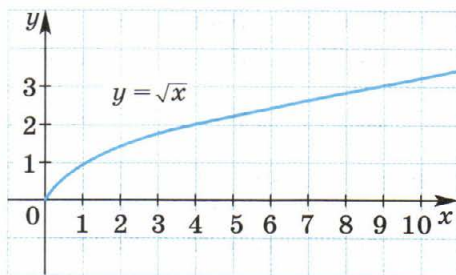


Рис. 2.29

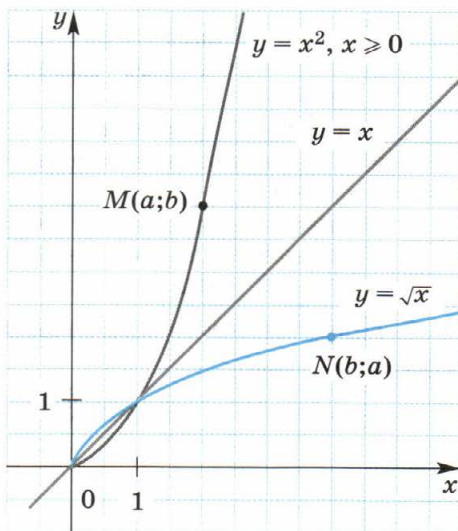


Рис. 2.30

3. При движении по оси x слева направо график поднимается вверх, причём этот «подъём» хотя и замедляется, но неограничен, т. е. график пересекает любую горизонтальную прямую, расположенную выше оси x .

- Постройте график зависимости $y = \sqrt{x}$, используя таблицу значений x и y , приведённую в учебнике (фрагмент 1). Найдите по графику значения $\sqrt{x}$, если $x = 4; 5; 8$.
- Относительно какой прямой симметричны графики зависимостей $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$, где $x \geq 0$? Для точки $(2; 4)$, принадлежащей параболе $y = x^2$, назовите симметричную ей точку, принадлежащую графику зависимости $y = \sqrt{x}$. Для точки $(3; \sqrt{3})$, принадлежащей графику зависимости $y = \sqrt{x}$, назовите симметричную ей точку, принадлежащую параболе $y = x^2$.
- а) Опишите свойства графика зависимости $y = \sqrt{x}$ (фрагмент 3). Пересекает ли этот график прямая $y = 10$; $y = -10$?
- б) Используя описание свойств графика зависимости $y = \sqrt{x}$ во фрагменте 3, опишите аналогичным образом свойства графика зависимости $y = x^2$, где $x \geq 0$.

A

РАБОТАЕМ С ГРАФИКОМ (308–309)

- 308** Пользуясь графиком зависимости $y = \sqrt{x}$, найдите:
- значение выражения $\sqrt{x}$ при x , равном 2,5; 4,5; 8,5.
 - значение x , при котором $\sqrt{x} = 1,5; 2,5$.
- 309** Определите, пересекаются ли график зависимости $y = \sqrt{x}$ и заданная прямая. Если да, то вычислите координаты точки пересечения:
- $x = 16$, $x = 10$, $x = -4$, $x = a$ ($a > 0$), $x = a$ ($a < 0$);
 - $y = 10$, $y = \sqrt{2}$, $y = -5$, $y = c$ ($c > 0$), $y = c$ ($c < 0$).
- 310** Принадлежит ли графику зависимости $y = \sqrt{x}$ точка:
- (225; 15);
 - (-16; 4);
 - (27; $\sqrt{27}$);
 - (144; -12);
 - (0,01; 0,1);
 - ($\sqrt{15}$; 15)?
- 311** Определите, как расположена относительно графика зависимости $y = \sqrt{x}$ заданная точка — принадлежит графику, расположена выше графика или ниже графика: A(121; 11), B(64; 10), C(24; $\sqrt{24}$), D(38; 6), E(0,2; 0,04), F(0,04; 0,2).

312 Какое приращение получает переменная y , где $y = \sqrt{x}$, при изменении x :

а) от 0 до 10; б) от 10 до 20; в) от 20 до 30; г) от 100 до 110? Дайте приближённый ответ, используя калькулятор.

Совет. Результаты оформите в виде таблицы.

Пункт	x_1	x_2	y_1	y_2	$y_2 - y_1$
а)					
б)					
в)					
г)					

РАССУЖДАЕМ (313–314) При выполнении упражнений воспользуйтесь рисунком 2.30.

313 Сравните числа:

а) a и $\sqrt{a}$, если $0 < a < 1$; если $a > 1$;

б) a^2 и $\sqrt{a}$, если $0 < a < 1$; если $a > 1$.

314 Расположите в порядке возрастания числа:

а) 0,5, $\sqrt{0,5}$ и $0,5^2$; б) 12,5, $\sqrt{12,5}$ и $12,5^2$.

Б

315 а) Постройте график зависимости $y = -\sqrt{x}$, заполнив предварительно следующую таблицу:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$-\sqrt{x}$											

б) При каких значениях x имеет смысл выражение $\sqrt{-x}$? Постройте график зависимости $y = \sqrt{-x}$.

316 **ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО** Даны точки $A(12; 4)$, $B(8; 2)$, $C(17; 5)$. Верно ли, что график зависимости $y = \sqrt{x}$ пересекает AB ; BC ? не пересекает AC ?

317 Постройте в координатной плоскости график зависимости $y^2 = x$.

2.6 Свойства квадратных корней

- 1 В этом пункте рассматриваются свойства *арифметических квадратных корней*. Однако для краткости вместо «арифметический квадратный корень» мы будем говорить «квадратный корень» или просто «корень».

Прежде всего остановимся на свойстве, которое, по сути, вам уже знакомо. Вы знаете, что, например, $(\sqrt{2})^2 = 2$, $(\sqrt{3})^2 = 3$, $(\sqrt{5})^2 = 5$. Такое же равенство можно записать для любого неотрицательного числа a . А именно:

□ При любом $a \geq 0$ $(\sqrt{a})^2 = a$.

Это равенство непосредственно следует из определения квадратного корня.

- 2 Рассмотрим теперь свойства, которые позволяют преобразовать корень из произведения и частного двух неотрицательных чисел. Начнём с примера.

Пусть нужно найти значение выражения $\sqrt{11^2 \cdot 15^2}$. Мы это делали так:

$$\sqrt{11^2 \cdot 15^2} = \sqrt{(11 \cdot 15)^2} = 11 \cdot 15 = 165.$$

Однако легко заметить, что если извлечь корень из каждого множителя отдельно и результаты перемножить, то получится то же число:

$$\sqrt{11^2 \cdot 15^2} = \sqrt{11^2} \cdot \sqrt{15^2} = 11 \cdot 15 = 165.$$

Этот результат не случаен. Справедливо следующее свойство:

Корень из произведения неотрицательных чисел равен произведению корней из этих чисел.

На символическом языке это свойство записывается так:

□ Для любых $a \geq 0$ и $b \geq 0$ $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Доказательство. Чтобы доказать равенство $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, нужно убедиться, что выполняются два условия:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0 \text{ и } (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = ab.$$

Первое очевидно: так как $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ — неотрицательные числа, то их произведение $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ также неотрицательно.

Чтобы убедиться в выполнении второго условия, возведём произведение $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ в квадрат:

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab.$$

Таким образом, теорема доказана. Заметим, что это свойство корней распространяется на случай произведения любого числа множителей.

Аналогичную теорему можно доказать и для частного:

Корень из частного от деления неотрицательного числа на положительное равен частному корней из этих чисел.

На символическом языке это свойство записывается так:

□ Для любых $a \geq 0$ и $b > 0$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Приведём примеры применения рассмотренных свойств.

Пример 1. $\sqrt{81 \cdot 25 \cdot 64} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{64} = 9 \cdot 5 \cdot 8 = 360$.

Пример 2. $\sqrt{\frac{49}{121}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{121}} = \frac{7}{11}$.

3 Если равенства $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ и $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ прочесть справа налево, то мы получим *правила умножения и деления корней*:

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, где $a \geq 0$ и $b \geq 0$;

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, где $a \geq 0$ и $b > 0$.

Пример 3. $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18 \cdot 2} = \sqrt{36} = 6$.

Пример 4. $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{75}{3}} = \sqrt{25} = 5$.

4 Воспользуемся свойством корня из произведения для преобразования выражения $\sqrt{48}$:

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = 4\sqrt{3}.$$

В таких случаях говорят, что *множитель вынесли из-под знака корня*.

Нетрудно выполнить и обратное преобразование — *внести множитель под знак корня*. Для этого нужно будет воспользоваться правилом умножения корней:

$$4\sqrt{3} = \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = \sqrt{48}.$$

Подчеркнём, что под корень можно вносить только положительный множитель. А если перед корнем стоит отрицательное число, то минус там и должен остаться. Например:

$$-4\sqrt{3} = -\sqrt{4^2} \cdot \sqrt{3} = -\sqrt{4^2 \cdot 3} = -\sqrt{48}.$$

- Упростите выражение: $(\sqrt{3})^2$, $(\sqrt{6})^2$, $(\sqrt{17})^2$. Запишите в буквенном виде соответствующее свойство квадратного корня.
- Сформулируйте свойство корня из произведения и запишите его с помощью букв. Преобразуйте выражение $\sqrt{49 \cdot 16}$.
- Сформулируйте свойство корня из частного и запишите его с помощью букв. Преобразуйте выражение $\sqrt{\frac{25}{81}}$.
- Запишите на символическом языке правила умножения и деления корней (фрагмент 3). Вычислите произведение $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ и частное $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$.
- На примере преобразования выражения $\sqrt{63}$ расскажите, как выносят множитель из-под знака корня (фрагмент 4).
- На примерах преобразования выражений $3\sqrt{5}$ и $-2\sqrt{7}$ расскажите, как вносят множитель под знак корня (фрагмент 4).

А

318 Упростите:

- | | | |
|------------------------------------|-----------------------------------|---|
| а) $2\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}$; | в) $3\sqrt{7} \cdot 10\sqrt{7}$; | д) $(3\sqrt{8})^2$; |
| б) $3\sqrt{15} \cdot 6\sqrt{15}$; | г) $(2\sqrt{11})^2$; | е) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$. |

319 Докажите, что:

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| а) $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; | в) $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$; |
| б) $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$; | г) $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. |

Образец. Докажем, что $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Воспользуемся определением арифметического корня. Так как $3\sqrt{2} \geq 0$ и $(3\sqrt{2})^2 = 9 \cdot 2 = 18$, то по определению $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

■ ДЕЙСТВУЕМ ПО ПРАВИЛУ (320–323) ■ Вычислите:

320 а) $\sqrt{15 \cdot 121}$; в) $\sqrt{1,44 \cdot 36}$; д) $\sqrt{0,09 \cdot 196}$;

б) $\sqrt{16 \cdot 900}$; г) $\sqrt{0,81 \cdot 0,49}$; е) $\sqrt{1,69 \cdot 0,25}$.

321 а) $\sqrt{\frac{25}{81}}$; в) $\sqrt{\frac{0,49}{4}}$; д) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$; ж) $\sqrt{2\frac{14}{25}}$;

б) $\sqrt{\frac{121}{36}}$; г) $\sqrt{\frac{1,44}{25}}$; е) $\sqrt{1\frac{13}{36}}$; з) $\sqrt{5\frac{1}{16}}$.

322 а) $\sqrt{\frac{1}{16} \cdot \frac{9}{25}}$; б) $\sqrt{\frac{64}{9} \cdot \frac{4}{49}}$; в) $\sqrt{\frac{0,25 \cdot 49}{9}}$; г) $\sqrt{\frac{169 \cdot 81}{400}}$.

323 а) $\sqrt{4 \cdot 9 \cdot 0,36}$; в) $\sqrt{2,25 \cdot 0,04 \cdot 900}$; д) $\sqrt{2\frac{1}{4} \cdot 1\frac{9}{16} \cdot \frac{1}{100}}$;

б) $\sqrt{0,64 \cdot 0,04 \cdot 1,21}$; г) $\sqrt{9,61 \cdot 0,01 \cdot 400}$; е) $\sqrt{2\frac{14}{121} \cdot 1\frac{7}{9} \cdot \frac{1}{9}}$.

324 ■ ДОКАЗЫВАЕМ ■ а) Докажите, что $\sqrt{5^8} = 5^4$; $\sqrt{3^{20}} = 3^{10}$.

б) Докажите свойство: $\sqrt{a^{2n}} = a^n$, где $a \geq 0$.

325 Пользуясь свойством, доказанным в упражнении 324, упростите выражение:

а) $\sqrt{2^{22}}$; б) $\sqrt{3^{14}}$; в) $\sqrt{2^{100} \cdot 3^{50}}$; г) $\sqrt{5^{28} \cdot 2^{20}}$.

Вычислите (326–327).

326 а) $\sqrt{24^2 \cdot 3^2}$; в) $\sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^6}$; д) $\sqrt{\frac{3^2 \cdot 2^8}{5^2}}$;

б) $\sqrt{13^2 \cdot 2^6}$; г) $\sqrt{3^4 \cdot 5^4 \cdot 2^8}$; е) $\sqrt{\frac{3^4}{2^6 \cdot 5^6}}$.

327 а) $\sqrt{125 \cdot 5}$; в) $\sqrt{48 \cdot 27}$; д) $\sqrt{50 \cdot 72}$;

б) $\sqrt{8 \cdot 98}$; г) $\sqrt{810 \cdot 10}$; е) $\sqrt{30 \cdot 480}$.

Образец. $\sqrt{135 \cdot 15} = \sqrt{5 \cdot 27 \cdot 5 \cdot 3} = \sqrt{5^2 \cdot 3^4} = 45$.

■ РАССУЖДАЕМ (328–329) ■

328 Возведите число 34 в квадрат. Пользуясь полученным результатом, вычислите: $\sqrt{1156}$, $\sqrt{115\,600}$, $\sqrt{11,56}$, $\sqrt{0,1156}$.

329 Известно, что $\sqrt{45} \approx 6,708$. Найдите приближённое значение выражения: $\sqrt{4500}$, $\sqrt{450\,000}$, $\sqrt{0,45}$, $\sqrt{0,0045}$.

Действуем по правилу (330–331) Вычислите:

330 Вычислите:

а) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$; д) $\frac{\sqrt{108}}{\sqrt{3}}$;

б) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45}$; е) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{150}}$;

в) $\sqrt{50} \cdot \sqrt{2}$; ж) $\frac{\sqrt{90}}{\sqrt{40}}$;

г) $\sqrt{242} \cdot \sqrt{8}$; з) $\frac{\sqrt{300}}{\sqrt{27}}$.

331 а) $(2\sqrt{3})^2 \cdot 5$; в) $(\sqrt{3})^3 \cdot \sqrt{48}$;

б) $\frac{(3\sqrt{2})^2}{36}$; г) $\frac{25\sqrt{3}}{(5\sqrt{3})^3}$.

332 Упростите:

а) $2\sqrt{7} \cdot \sqrt{2}$; г) $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6}}{12}$; ж) $\frac{\sqrt{333}}{\sqrt{111}}$;

б) $4\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{3}$; д) $\frac{\sqrt{15} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{10}}{3}$; з) $\frac{3\sqrt{51}}{2\sqrt{17}}$;

в) $\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}$; е) $\sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt{\frac{12}{5}}$; и) $\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{10}}$.

333 Найдите с помощью калькулятора приближённое значение выражения с тремя знаками после запятой:

а) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$; б) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{8}$; в) $\frac{\sqrt{505}}{\sqrt{101}}$; г) $\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}$.

Указание. Сначала представьте выражение в виде $\sqrt{a}$.

334 Сравните значения выражений:

а) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$ и $\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}$; в) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{12}}$ и $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{5}}$;

б) $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{6}}$ и $\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}}$; г) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$ и $\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$.

335 Являются ли данные числа взаимно обратными:

а) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\frac{5}{\sqrt{5}}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sqrt{7}$ и $\frac{\sqrt{7}}{7}$; г) $\frac{6}{\sqrt{7}}$ и $\frac{\sqrt{6}}{7}$?

Указание. Проверьте, равно ли произведение данных чисел единице.

Вынесите множитель из-под знака корня (336—337).

336 а) $\sqrt{50}$; в) $\sqrt{27}$; д) $\sqrt{48}$; ж) $\sqrt{300}$;

б) $\sqrt{45}$; г) $\sqrt{98}$; е) $\sqrt{20}$; з) $\sqrt{450}$.

337 а) $2\sqrt{8}$; в) $\frac{1}{2}\sqrt{72}$; д) $0,4\sqrt{75}$; ж) $\frac{\sqrt{125}}{10}$;

б) $4\sqrt{18}$; г) $\frac{1}{3}\sqrt{54}$; е) $1,5\sqrt{32}$; з) $\frac{\sqrt{96}}{8}$.

338 Какое из следующих выражений равно $\frac{\sqrt{48}}{2}$?

1) $\sqrt{24}$ 2) $2\sqrt{6}$ 3) $2\sqrt{3}$ 4) $8\sqrt{3}$

Внесите множитель под знак корня (339—340).

339 а) $3\sqrt{2}$; в) $2\sqrt{3}$; д) $\frac{1}{2}\sqrt{12}$; ж) $4\sqrt{\frac{1}{32}}$;

б) $2\sqrt{5}$; г) $7\sqrt{2}$; е) $\frac{1}{3}\sqrt{27}$; з) $5\sqrt{0,4}$.

340 а) $-5\sqrt{6}$; б) $-10\sqrt{7}$; в) $-4\sqrt{5}$; г) $-6\sqrt{2}$.

341 Какое из следующих выражений равно $-2\sqrt{3}$?

1) $\sqrt{6}$ 2) $-\sqrt{6}$ 3) $\sqrt{12}$ 4) $-\sqrt{12}$

■ РАССУЖДАЕМ (342—343) ■

342 Сравните значения выражений:

а) $2\sqrt{3}$ и $\sqrt{8}$; в) $2\sqrt{6}$ и $3\sqrt{3}$; д) $5\sqrt{\frac{3}{5}}$ и $3\sqrt{\frac{5}{3}}$;

б) $\sqrt{45}$ и $3\sqrt{5}$; г) $2\sqrt{\frac{1}{8}}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; е) $\frac{1}{3}\sqrt{20}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{8}$.

343 Расположите в порядке возрастания:

а) $3\sqrt{2}$; $2\sqrt{3}$ и 4; в) $4\sqrt{3}$; $2\sqrt{10}$ и $5\sqrt{2}$;

б) 5; $2\sqrt{7}$ и $3\sqrt{3}$; г) $3\sqrt{6}$; $6\sqrt{2}$ и $2\sqrt{13}$.

344 Найдите значение выражения при заданных значениях переменных:

- а) $0,2ab$ при $a = \sqrt{15}$, $b = 2\sqrt{5}$; г) $-\frac{3x^2}{2}$ при $x = 2\sqrt{3}$;
 б) $-\frac{1}{3}xy$ при $x = \sqrt{6}$, $y = \sqrt{3}$; д) $0,5x^3$ при $x = 3\sqrt{2}$;
 в) $\frac{a^2}{4}$ при $a = \frac{\sqrt{2}}{3}$; е) $8y^3$ при $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

345 Сократите дробь:

- а) $\frac{\sqrt{4x}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{8a}}{6}$; в) $\frac{27}{\sqrt{81m}}$; г) $\frac{20}{\sqrt{50y}}$.

Б

Найдите значение выражения (346—347).

346 а) $\sqrt{2,5 \cdot 10^5}$; в) $\sqrt{4,9 \cdot 10^{-3}}$;

б) $\sqrt{1,6 \cdot 10^7}$; г) $\sqrt{8,1 \cdot 10^{-5}}$.

347 а) $\sqrt{30 \cdot 66 \cdot 220}$; б) $\sqrt{54 \cdot 48 \cdot 50}$; в) $\sqrt{3^3 \cdot 12^5}$.

348 Упростите выражение:

- а) $4\sqrt{5} \cdot \sqrt{45} \cdot \sqrt{50}$; в) $2\sqrt{15} \cdot 3\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{30}$;
 б) $3\sqrt{27} \cdot \sqrt{48} \cdot \sqrt{75}$; г) $5\sqrt{18} \cdot 4\sqrt{40} \cdot 2\sqrt{35}$.

349 Упростите выражение:

- а) $(2a\sqrt{3a})^2$; в) $2x \cdot (\sqrt{8x})^2$; д) $3m(\sqrt{2m})^3$;
 б) $(5b\sqrt{6b})^2$; г) $(y\sqrt{2y})^3$; е) $\frac{(\sqrt{6n})^3}{(\sqrt{2n})^2}$.

350 ■ РАССУЖДАЕМ ■ Расположите в порядке возрастания:

- а) $\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{\frac{3}{5}}$, $2\sqrt{0,2}$, 1 , $-2\sqrt{\frac{1}{2}}$, $-\sqrt{0,6}$;
 б) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{17}}$, $\frac{1}{4}$; г) $\frac{5}{12}$, $\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

351 На координатной плоскости даны точки $A(15; 3\sqrt{5})$, $B(3\sqrt{5}; 15)$, $C(12; 2\sqrt{3})$, $D(2\sqrt{3}; 12)$. Какая из точек A , B , C или D принадлежит графику зависимости $y = \sqrt{x}$?

2.7 Преобразование выражений, содержащих квадратные корни

1 Вам уже приходилось применять свойства арифметических квадратных корней для преобразования выражений, содержащих радикалы. Разберём более сложные примеры.

Пример 1. Рассмотрим сумму $\sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{8}$.

В каждом слагаемом можно вынести множитель из-под знака корня:

$$\sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{8} = \sqrt{9 \cdot 2} - \sqrt{16 \cdot 2} + \sqrt{4 \cdot 2} = 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}.$$

Теперь слагаемые содержат корни с одинаковыми подкоренными выражениями. Такие выражения, как $3\sqrt{2}$, $-4\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, называют *подобными радикалами*, и к ним применимо правило приведения подобных слагаемых. Поэтому сумму можно упростить, сложив коэффициенты и приписав общий множитель $\sqrt{2}$. Так как $3 - 4 + 2 = 1$, то $3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Пример 2. Упростим выражение $(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})(2\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

Данное выражение является произведением суммы двух выражений на их разность. Поэтому для его преобразования можно применить известную формулу $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$:

$$(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})(2\sqrt{3} - \sqrt{2}) = (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 3 - 2 = 10.$$

2 Пример 3. Рассмотрим дробь $\frac{3\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}$. Её можно преобразовать в равную дробь, не содержащую корня в знаменателе. Для этого достаточно числитель и знаменатель дроби умножить на $\sqrt{2}$. Получим

$$\frac{3\sqrt{7}}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{7} \cdot \sqrt{2}}{4(\sqrt{2})^2} = \frac{3\sqrt{14}}{8}.$$

Говорят, что мы *освободились от иррациональности в знаменателе дроби*. В результате мы получили более простое выражение; оно удобнее, например, для вычисления приближённого значения данной дроби.

3 Пример 4. Упростим выражение $\sqrt{x^2}$.

Этот пример не такой простой, как может показаться на первый взгляд. Результат зависит от знака x .

Подставим вместо x какое-нибудь положительное число, например число 8. Тогда $\sqrt{x^2} = \sqrt{8^2} = 8$, т. е. в данном случае $\sqrt{x^2} = x$. Возьмём теперь отрицательное значение x , например -8 . Тогда $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-8)^2} = \sqrt{64} = 8$, т. е. в этом случае $\sqrt{x^2} = -x$. Очевидно, что при любом x выполняется равенство

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

В самом деле:

если $x \geq 0$, то $|x| = x$ и $|x|^2 = x^2$;

если $x < 0$, то $|x| = -x$ и $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$.

Так как $|x|$ — число неотрицательное и $|x|^2 = x^2$, то по определению квадратного корня $\sqrt{x^2} = |x|$.

- В сумме $5\sqrt{3} + \sqrt{5} - 4\sqrt{3} + \sqrt{3}$ подчеркните подобные радикалы. Упростите сумму, пользуясь правилом приведения подобных слагаемых.
- Какая формула сокращённого умножения использована для преобразования выражения в примере 2? Какую формулу сокращённого умножения можно использовать для преобразования выражения $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$? Выполните это преобразование.
- Расскажите, как освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$, и выполните преобразование (фрагмент 2).
- Используя рассуждения во фрагменте 3, объясните, почему при любом x выполняется равенство $\sqrt{x^2} = |x|$. Проиллюстрируйте равенство $\sqrt{x^2} = |x|$ на примере значений x , равных 17 и -17 .

А

352 Назовите подобные радикалы:

- | | |
|---|---|
| а) $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$; | г) $\sqrt{15}$, $-3\sqrt{5}$, $-2\sqrt{15}$, $5\sqrt{3}$; |
| б) $\sqrt{5}$, $6\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$; | д) $2\sqrt{x}$, $3\sqrt{5}$, $\sqrt{x}$; |
| в) $-2\sqrt{7}$, $7\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$, $4\sqrt{7}$; | е) $3\sqrt{a}$, $8\sqrt{b}$, $3\sqrt{c}$, $8\sqrt{a}$. |

353 Приведите подобные слагаемые:

- | | |
|---|--|
| а) $5\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - \sqrt{5}$; | г) $3\sqrt{a} - 2\sqrt{a}$; |
| б) $\sqrt{7} - 4\sqrt{7} + \sqrt{7}$; | д) $\sqrt{c} + 8\sqrt{c} - 5\sqrt{c}$; |
| в) $\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$; | е) $5\sqrt{x} + \sqrt{x} + 3\sqrt{y} + \sqrt{y}$. |

354 Упростите выражение:

- а) $3\sqrt{3} + \sqrt{12}$; г) $4\sqrt{2} - \sqrt{50}$; ж) $\sqrt{8} + 2\sqrt{18} - \sqrt{72}$;
 б) $\sqrt{45} - 2\sqrt{5}$; д) $\sqrt{2} - \sqrt{32} + \sqrt{50}$; з) $2\sqrt{20} - \sqrt{45} - 2\sqrt{12}$;
 в) $\sqrt{48} - 10\sqrt{3}$; е) $2\sqrt{3} - \sqrt{27} + 2\sqrt{48}$; и) $2\sqrt{28} - 0,5\sqrt{24} + 2\sqrt{7}$.

355 ■ РАССУЖДАЕМ ■ Рациональным или иррациональным является значение выражения:

- а) $10\sqrt{3} + 4 - \sqrt{300}$; в) $3\sqrt{28} + 2\sqrt{7} - 2\sqrt{5}$;
 б) $\sqrt{162} - 10\sqrt{2} + \sqrt{27}$; г) $\sqrt{48} - 5 - 4\sqrt{3}$?

Преобразуйте выражение, используя формулы сокращённого умножения (356—357).

- 356** а) $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$; г) $(4 - \sqrt{3})(4 + \sqrt{3})$;
 б) $(\sqrt{6} - 1)(\sqrt{6} + 1)$; д) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})$;
 в) $(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5})$; е) $(\sqrt{10} + \sqrt{11})(\sqrt{11} - \sqrt{10})$.

- 357** а) $(1 - \sqrt{5})^2$; в) $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$; д) $(5 - \sqrt{5})^2 + 5\sqrt{5}$;
 б) $(\sqrt{10} - 2)^2$; г) $(\sqrt{7} + \sqrt{2})^2$; е) $(\sqrt{11} + \sqrt{6})^2 - 17$.

358 Найдите значение выражения $x^2 - 4$ при:

- а) $x = \sqrt{3}$; в) $x = \sqrt{3} + 1$;
 б) $x = \sqrt{3} - 1$; г) $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

359 Найдите значение выражения $1 - a^2$ при:

- а) $a = \sqrt{5}$; в) $a = 1 - \sqrt{5}$;
 б) $a = \sqrt{5} - 1$; г) $a = 1 + \sqrt{5}$.

360 Найдите значения выражений $\frac{xy}{x+y}$ и $\frac{x-y}{xy}$ при:

- а) $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{8}$; в) $x = \sqrt{6} - \sqrt{3}, y = \sqrt{6} + \sqrt{3}$;
 б) $x = 2 - \sqrt{3}, y = 2 + \sqrt{3}$; г) $x = \sqrt{5} + \sqrt{2}, y = \sqrt{5} - \sqrt{2}$.

■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ (361—362) ■

361 Периметр квадрата (в см) равен $4\sqrt{2} + 16$. Найдите площадь квадрата.

362 Найдите площадь прямоугольника, если:

- а) его периметр равен 6 см, а одна из сторон $\sqrt{2}$ см;
 б) его периметр равен 14 см, а одна из сторон $3 + \sqrt{2}$ см.

363 Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

- а) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; в) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; д) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$; ж) $\frac{7}{3\sqrt{7}}$;
 б) $\frac{16}{\sqrt{2}}$; г) $\frac{7}{\sqrt{7}}$; е) $\frac{2}{3\sqrt{2}}$; з) $\frac{4}{3\sqrt{6}}$.

364 Из приведённых ниже выражений выберите выражения, равные $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{3}{\sqrt{6}}.$$

365 Какое из следующих выражений не равно дроби $\frac{3}{\sqrt{12}}$?

- 1) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$ 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{12}}{4}$ 4) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Примените равенство $\sqrt{x^2} = |x|$ для преобразования выражений (366—367).

366 Упростите выражение:

- а) $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$; б) $\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2}$; в) $\sqrt{(1 - \sqrt{5})^2}$; г) $\sqrt{(\sqrt{10} - 3)^2}$.

367 Упростите выражение (буквами обозначены положительные числа):

- а) $\sqrt{49a^2}$; в) $\sqrt{8x^2}$; д) $\sqrt{\frac{y^2}{2}}$;
 б) $\sqrt{3n^2}$; г) $\sqrt{\frac{m^2}{4}}$; е) $\sqrt{12a^3}$.

Б

Упростите выражение (368—369).

- 368** а) $(\sqrt{28} - 3\sqrt{5}) - (\sqrt{7} + \sqrt{20})$;
 б) $(3\sqrt{32} - 2\sqrt{18}) + (\sqrt{50} - 2\sqrt{8})$;
 в) $(\sqrt{27} - 3\sqrt{45} - \sqrt{20}) - (3\sqrt{12} - 2\sqrt{80})$;
 г) $(3\sqrt{60} - 2\sqrt{54}) + (4\sqrt{15} + 6\sqrt{6} - \sqrt{600})$.

369 а) $\sqrt{9x} - \sqrt{4x} - \sqrt{16y} + \sqrt{9y}$;

б) $\sqrt{0,25m} - \sqrt{0,25n} + \sqrt{0,16n} - \sqrt{0,16m}$.

370 Сократите дробь:

а) $\frac{3\sqrt{8} - 2\sqrt{12} + \sqrt{20}}{3\sqrt{18} - 2\sqrt{27} + \sqrt{45}}$; б) $\frac{\sqrt{28} - 2\sqrt{18} - 2\sqrt{12}}{6\sqrt{32} + 4\sqrt{48} - 8\sqrt{7}}$.

Упростите выражение (371—372).

371 а) $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})$; в) $(3\sqrt{5} - 2\sqrt{6})^2$;

б) $(\sqrt{32} - 3\sqrt{12})(2\sqrt{8} + \sqrt{108})$; г) $(2 - \sqrt{6})^2 - (5 + \sqrt{2})^2$.

372 а) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$; в) $\frac{\sqrt{\sqrt{30} - \sqrt{5}}}{5} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{30} + \sqrt{5}}}{5}$;

б) $\sqrt{4 - \sqrt{7}} \cdot \sqrt{4 + \sqrt{7}}$; г) $\frac{\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{15}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{15} - \sqrt{3}}}{3}$.

373 ■ ДОКАЗЫВАЕМ ■ Докажите, что:

а) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{6}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{6}} = 3$;

б) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = 2$;

в) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} = 1$.

374 Упростите:

а) $(\sqrt{10} - \sqrt{19} + \sqrt{10 + \sqrt{19}})^2$; б) $(\sqrt{2\sqrt{5} + 4} - \sqrt{2\sqrt{5} - 4})^2$.

375 а) Выберите выражение, равное $\sqrt{16 - 6\sqrt{7}}$.

1) $\sqrt{7} - 3$ 2) $\sqrt{7} - \sqrt{3}$ 3) $3 - \sqrt{7}$

б) Выберите выражение, равное $\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$.

1) $\sqrt{6} - 2$ 2) $\sqrt{2} - \sqrt{6}$ 3) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$

376 ■ ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО ■ Верно ли равенство:

а) $\sqrt{7 - \sqrt{40}} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$; в) $1 - 2\sqrt{7} = \sqrt{29 - 4\sqrt{7}}$;

б) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}$; г) $\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$?

377 Упростите выражение:

а) $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$; б) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

378 Найдите значение выражения:

а) $x(x+1)(x+2)(x+3)$ при $x = \frac{\sqrt{5}-3}{2}$;

б) $(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)$ при $m = \frac{10+\sqrt{2}}{4}$.

379 ■ РАССУЖДАЕМ ■ Запишите выражение, на которое можно умножить данный двучлен, чтобы в произведении не содержалось знака корня. Проверьте, выполнив умножение:

1) $(2+\sqrt{3}) \cdot \dots$; 3) $(\sqrt{7}-\sqrt{5}) \cdot \dots$;

2) $(2\sqrt{5}-1) \cdot \dots$; 4) $(x+a\sqrt{y}) \cdot \dots$.

Что вы заметили в записи произведения?

380 Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби (примените результаты упражнения 379):

а) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$; в) $\frac{7-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$; д) $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{10}-3}$;

б) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; г) $\frac{\sqrt{11}+\sqrt{5}}{\sqrt{11}-\sqrt{5}}$; е) $\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+3\sqrt{3}}$.

Образец. $\frac{2}{2+\sqrt{6}} = \frac{2(2-\sqrt{6})}{(2+\sqrt{6})(2-\sqrt{6})} = \frac{2(2-\sqrt{6})}{-2} = \sqrt{6}-2$.

■ ИЩЕМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ (381–382) ■

381 Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{1}{1+\sqrt{5}-\sqrt{6}}$; б) $\frac{12}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

382 Упростите выражение (буквами обозначены положительные числа):

а) $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{\sqrt{ab}}{a}$; б) $\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{y}} - \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{\sqrt{y}}{y}$.

383 ■ ДОКАЗЫВАЕМ ■ 1) Докажите, что верно равенство:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} = \sqrt{5}-1.$$

Подсказка. Освободитесь от иррациональности в знаменателе каждой дроби.

2) Упростите выражение:

а) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$;

б) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$.

384 Упростите выражение:

а) $\sqrt{81a^2}$, если $a < 0$; в) $\sqrt{0,16a^2c^2}$, если $a < 0$, $c < 0$;

б) $\sqrt{24x^2}$, если $x > 0$; г) $\sqrt{8m^2n^2}$, если $m < 0$, $n > 0$.

385 Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{2x^3}$; б) $\sqrt{\frac{x^5}{6}}$; в) $\sqrt{\frac{x^3}{y^3}}$; г) $\sqrt{(x+y)^3}$.

386 Упростите выражение, если n — целое число:

а) $\sqrt{5^{2n}}$; б) $\sqrt{y^{4n}}$; в) $\sqrt{x^{2n}}$.

387 Постройте график зависимости:

а) $y = \sqrt{x^2}$; б) $y = (\sqrt{x})^2$; в) $y = x(\sqrt{x})^2$; г) $y = x\sqrt{x^2}$.

388 ■ ИССЛЕДУЕМ ■

1) Заметьте закономерность и запишите следующие три числа в последовательности: $2\frac{2}{3}$, $3\frac{3}{8}$, $4\frac{4}{15}$, $5\frac{5}{24}$, ...

2) Проверьте равенства: $\sqrt{2\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{3\frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}}$, $\sqrt{4\frac{4}{15}} = 4\sqrt{\frac{4}{15}}$.

Составьте несколько аналогичных равенств.

3) Запишите соответствующее равенство в буквенном виде и докажете его.

2.8 Кубический корень

1 Если объём куба равен 8 см^3 , то ребро куба равно 2 см, так как $2^3 = 8$. Говорят, что число 2 — это кубический корень из 8.

Определение

Число b называют кубическим корнем из числа a , если $b^3 = a$.

Кубический корень из числа a обозначают $\sqrt[3]{a}$.

Например:

$$\sqrt[3]{0,001} = 0,1, \text{ так как } (0,1)^3 = 0,001;$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2, \text{ так как } (-2)^3 = -8.$$

2 Чтобы выяснить вопрос о том, для любого ли числа существует кубический корень, обратимся, как и в случае с квадратным корнем, к графику. Только теперь возьмём *кубическую параболу* — множество точек плоскости, координаты которых связаны зависимостью $y = x^3$.

Построим график зависимости $y = x^3$ и проведём горизонтальную прямую $y = a$, где a — произвольное число (рис. 2.31). Из графических соображений ясно, что при любом a эта прямая пересекает график $y = x^3$, причём только в одной точке. Ордината точки пересечения равна a , а её абсцисса — число, куб которого равен a , т. е. $\sqrt[3]{a}$.

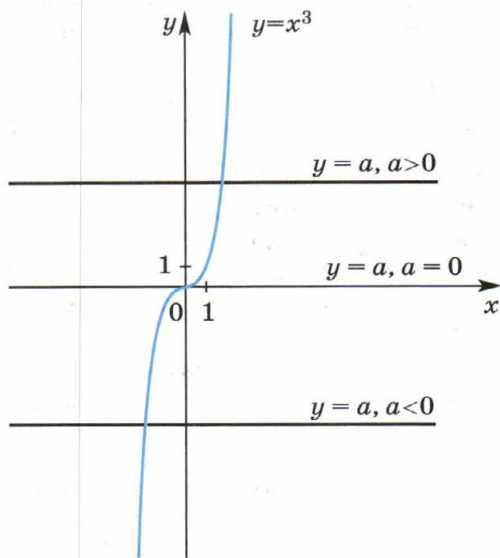


Рис. 2.31

Если $a > 0$, то $\sqrt[3]{a} > 0$;

если $a = 0$, то $\sqrt[3]{a} = 0$;

если $a < 0$, то $\sqrt[3]{a} < 0$.

Из определения кубического корня следует, что при любом a

$$(\sqrt[3]{a})^3 = a.$$

Например,

$$(\sqrt[3]{28})^3 = 28; (\sqrt[3]{-8})^3 = -8.$$

3 В заключение заметим, что квадратный и кубический корни являются частными случаями более общего понятия — корня n -й степени (n — натуральное число, большее 1).

Вы легко можете догадаться, как определяется корень n -й степени: *число b называется корнем n -й степени из числа a , если $b^n = a$.*

Свойства корня n -й степени различаются в зависимости от того, чётным или нечётным числом является показатель корня n .

Все корни чётной степени по своим свойствам похожи на квадратный корень, а нечётной степени — на кубический корень.

Квадратный корень называют ещё корнем второй степени, а кубический — корнем третьей степени.

Для записи корня n -й степени используют знак $\sqrt[n]{}$, где n — показатель корня, причём в случае чётного n этот знак применяется для обозначения неотрицательного корня. При $n = 2$ показатель не пишется.

Приближённые значения корней вычисляют с помощью калькулятора. Но если для извлечения квадратного корня достаточно ввести подкоренное число и нажать кнопку $\sqrt{}$, которая имеется на многих калькуляторах, то, чтобы вычислить, например, корень 3-й или 4-й степени, придётся выполнить более сложную последовательность действий. Причём алгоритм извлечения корня может варьироваться в зависимости от того, калькулятор какой марки вы используете.

На некоторых калькуляторах имеется символ $\sqrt[n]{}$, и тогда им можно воспользоваться для извлечения корня любой степени.

Но есть и другая возможность. Дело в том, что в математике $\sqrt[n]{a}$ для положительных a записывают в виде степени $a^{\frac{1}{n}}$ (например, $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$). И поэтому для извлечения корня можно использовать кнопку с символом степени y^x .

Последовательность действий, которую при этом придётся выполнить, зависит от модели калькулятора. Так, значение выражения $\sqrt[3]{9}$ на некоторых калькуляторах вычисляется следующим образом:

$$\boxed{9} \boxed{y^x} \boxed{3} \boxed{\frac{1}{x}} \boxed{=}$$

После нажатия указанных кнопок на экране высветится число 2.0800838. Взяв, например, два знака после запятой, получим, что $\sqrt[3]{9} \approx 2,08$.

- Сформулируйте определение кубического корня. Докажите, что $\sqrt[3]{216} = 6$.
- При каких значениях a выражение $\sqrt[3]{a}$ имеет смысл? Найдите: $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[3]{-1000}$, $\sqrt[3]{0}$.
- Вычислите: $(\sqrt[3]{0,064})^3$, $(\sqrt[3]{-2,5})^3$. Каким свойством вы воспользовались (фрагмент 2)?
- Какое число называется корнем n -й степени из числа a (фрагмент 3)? Найдите: $\sqrt[4]{81}$, $\sqrt[5]{32}$.

Пусть a — положительное число. Как записывают в виде степени $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$? Запишите в виде степени число $\sqrt[3]{20}$ и найдите с помощью калькулятора десятичное приближение этого числа с одним знаком после запятой.

A

389 Заполните таблицу кубов натуральных чисел от 1 до 10.

[illegible]

С помощью таблицы найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{8}$; в) $\sqrt[3]{-64}$; д) $\sqrt[3]{\frac{1}{729}}$; ж) $\sqrt[3]{-\frac{1}{512}}$;
б) $\sqrt[3]{125}$; г) $\sqrt[3]{-216}$; е) $\sqrt[3]{\frac{1}{1000}}$; з) $\sqrt[3]{343\,000}$.

390 Укажите два последовательных целых числа, между которыми заключено число (воспользуйтесь таблицей кубов из упражнения **389**):

а) $\sqrt[3]{40}$; б) $\sqrt[3]{80}$; в) $\sqrt[3]{200}$; г) $\sqrt[3]{300}$.

391 Найдите с помощью калькулятора приближённое значение с тремя знаками после запятой следующего числа:

а) $\sqrt[3]{2}$; в) $\sqrt[3]{36}$; д) $\sqrt[3]{65,5}$;
б) $\sqrt[3]{10}$; г) $\sqrt[3]{0,1}$; е) $\sqrt[3]{0,05}$.

392 Какие из чисел 15, -18, 56, -110 можно подставить вместо a в выражения $\sqrt{a}$ и $\sqrt[3]{a}$ так, чтобы они имели смысл? Подставьте в каждое из выражений допустимые значения a . Между какими соседними целыми числами заключено значение полученного выражения?

393 ■ **ДЕЙСТВУЕМ ПО ПЛАНУ** 1) Заполните таблицу, указывая приближённые значения $\sqrt[3]{x}$ с одним знаком после запятой (используйте калькулятор).

[illegible]

2) Пользуясь полученными результатами, заполните таблицу для отрицательных значений x .

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
$\sqrt[3]{x}$										

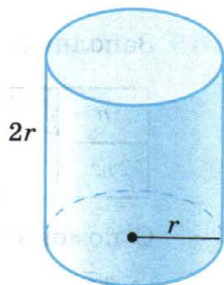
3) Отметьте в координатной плоскости точки с координатами $(x; \sqrt[3]{x})$ и, соединив их плавной линией, постройте график зависимости $y = \sqrt[3]{x}$.

- 394** ■ **НАБЛЮДАЕМ** ■ В одной системе координат постройте графики зависимостей $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$. Как расположены относительно прямой $y = x$ графики этих зависимостей?

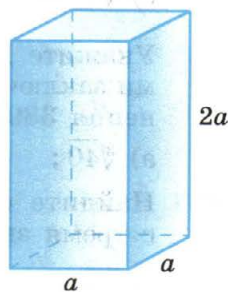
■ **ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ (395–396)** ■

- 395** а) Объём цилиндра, у которого диаметр основания равен высоте (рис. 2.32), вычисляется по формуле $V = 2\pi r^3$, где r — радиус основания. Выразите из этой формулы радиус основания r .

б) Запишите формулу для вычисления объёма прямоугольного параллелепипеда, в основании которого квадрат со стороной a и высота которого в два раза больше стороны основания (рис. 2.33). Выразите из этой формулы сторону основания a .



■ Рис. 2.32



■ Рис. 2.33

- 396** Объём шара вычисляется по формуле $V = \frac{\pi D^3}{6}$,

где D — диаметр шара. Выразите из этой формулы диаметр шара D . Найдите приближённое значение диаметра с точностью до целых, если $V = 34 \text{ дм}^3$, $\pi \approx 3,14$.

- 397** Вычислите: а) $\sqrt[4]{81}$; б) $\sqrt[5]{32}$; в) $\sqrt[6]{1\,000\,000}$; г) $\sqrt[5]{1}$.

Б

- 398** ■ **ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ** ■ Объём правильного тетраэдра (треугольной пирамиды, все рёбра которой равны) вычисляется по формуле $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$, где a — длина ребра тетраэдра. Выразите из этой формулы длину ребра a .

399 ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ

Нужно изготовить воздушный шар объёмом 8 м^3 . Сколько метров ткани шириной 2 м потребуется для изготовления этого шара? (При расчётах считайте $\pi \approx 3$; формула площади поверхности шара $S = 4\pi R^2$, где R — радиус шара.) Сделайте грубую прикидку, выразив результат в целых метрах.



- 400** Как с помощью калькулятора найти приближённое значение $\sqrt[5]{45}$? Найдите с помощью калькулятора приближённое значение с тремя знаками после запятой: а) $\sqrt[5]{124}$; б) $\sqrt[6]{50}$; в) $\sqrt[4]{30}$.

- 401 ИССЛЕДУЕМ** Заполните таблицу:

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	3
$\sqrt{x}$								
$\sqrt[3]{x}$								

- Используя данные таблицы, сравните $\sqrt{x}$ и $\sqrt[3]{x}$ при: $x = 0$; $x = 1$; $x > 1$; $0 < x < 1$.
- Постройте в одной и той же системе координат на промежутке $[0; 3]$ графики зависимостей $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt[3]{x}$ (за единственный отрезок примите 10 клеток).
- Укажите промежутков, на котором $\sqrt[3]{x} > \sqrt{x}$; $\sqrt[3]{x} < \sqrt{x}$.
- Выпишите в порядке возрастания числа:

$$\sqrt{7,4}; \sqrt{10}; \sqrt{0,96}; \sqrt{0,51}; \sqrt[3]{7,4}; \sqrt[3]{5,1}; \sqrt[3]{0,96}; 1.$$

2.9 Двойные радикалы

(Для тех, кому интересно)

Двойным радикалом называют выражение вида $\sqrt{a + b\sqrt{c}}$, где a, b, c — целые числа. Отметим, что это не «настоящий» математический термин, а рабочее название, употребляющееся в разговорном

математическом языке. При этом считается, конечно, что из числа c корень не извлекается, или, говоря более точно, число c не является квадратом натурального числа.

Двойной радикал обычно пытаются записать более просто, например в том же виде, что и подкоренное выражение, т. е. в виде $x + y\sqrt{c}$, где x и y — целые числа. Так, нетрудно убедиться, что

$$\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{2}.$$

В самом деле, $(3 - \sqrt{2})^2 = 9 - 6\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 11 - 6\sqrt{2}$ и $3 - \sqrt{2} > 0$.

Однако вы здесь имели, по существу, готовый ответ, и совершенно не ясно, как он получен. А найти решение можно следующим образом. Наша задача — записать выражение $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$, если это возможно, в виде $x + y\sqrt{2}$, где x и y — целые числа. Поэтому мы запишем равенство

$$\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = x + y\sqrt{2}$$

и попытаемся подобрать такие целые числа x и y , чтобы оно было верным.

Это равенство можно преобразовать так:

$$11 - 6\sqrt{2} = (x + y\sqrt{2})^2, \quad 11 - 6\sqrt{2} = x^2 + 2xy\sqrt{2} + 2y^2,$$

$$11 - 6\sqrt{2} = (x^2 + 2y^2) + 2xy\sqrt{2}.$$

Далее будем искать такие целые числа x и y , чтобы выполнялись равенства

$$x^2 + 2y^2 = 11 \text{ и } 2xy = -6.$$

Из второго равенства получаем, что $xy = -3$. Очевидно, что есть два варианта:

$$x = 3, y = -1 \text{ или } x = -3, y = 1.$$

Обе пары удовлетворяют и первому равенству, поэтому выражение $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$ равно либо $3 - \sqrt{2}$, либо $-3 + \sqrt{2}$.

Однако $\sqrt{2} < 3$, так что $-3 + \sqrt{2} < 0$, и поэтому

$$\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{2}.$$

Иногда двойной радикал $\sqrt{a + b\sqrt{c}}$ нельзя представить в виде $x + y\sqrt{c}$, где x, y — целые числа, но тем не менее от «внешнего» знака корня избавиться всё же удаётся.

Попробуем, например, представить выражение $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ в виде суммы $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, где x и y — натуральные числа:

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Тогда

$$5+2\sqrt{6} = x+y+2\sqrt{xy}.$$

Будем искать такие числа x и y , чтобы были равны по отдельности и целые, и иррациональные слагаемые, записанные в левой и в правой частях равенства

$$x+y=5, \quad xy=6.$$

Легко догадаться, что есть две пары чисел, удовлетворяющие полученным условиям: $x=2, y=3$ и $x=3, y=2$. Однако ответ у задачи только один:

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Упростите выражение (402—404).

402 а) $\sqrt{27+10\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$.

403 а) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$; в) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$;

б) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$; г) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$.

404 а) $\sqrt{17-12\sqrt{2}}$; б) $2\sqrt{\sqrt{14+6\sqrt{5}}}$.

405 Докажите формулу

$$\sqrt{a+b\sqrt{c}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b^2c}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2c}}{2}}, \text{ где } b > 0.$$

406 Формула, рассмотренная в предыдущем задании, представляет интерес, если выражение $a^2 - b^2c$ является квадратом натурального числа. Примените эту формулу для упрощения выражения:

а) $\sqrt{12+2\sqrt{11}}$; б) $\sqrt{57+12\sqrt{15}}$.

407 Докажите формулу

$$\sqrt{a-b\sqrt{c}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b^2c}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2c}}{2}}, \text{ где } b > 0.$$

Примените эту формулу для упрощения выражения

$$\sqrt{57-12\sqrt{15}}.$$

Дополнительные задания

Вычисления по формулам

- 408** Высота h , проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, вычисляется по формуле $h = \sqrt{ab}$ (рис. 2.34). Выразите из этой формулы a и b .

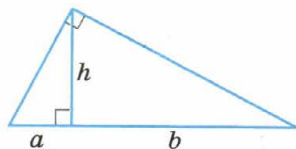


Рис. 2.34

- 409** Из формулы выразите каждую переменную, стоящую под знаком радикала:

а) $v = k \frac{\sqrt{F}}{l}$; б) $t = \sqrt{\frac{2S}{a}}$; в) $\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$.

- 410** Известны формулы для вычисления площади S треугольника.

Равностороннего: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a — сторона.

Равнобедренного: $S = \frac{1}{2}a\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$, где a — основание, b — боковая сторона.

Любого: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a , b и c — стороны, $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр.

Найдите приближённое значение площади каждого треугольника, изображённого на рисунке 2.35, используя соответствующую формулу. (Ответ дайте с одним знаком после запятой.)

- 411** Из клинописных табличек, найденных при раскопках, известен способ извлечения квадратных корней, которым пользовались древние вавилоняне ещё за две тысячи лет до н. э. На современном математическом языке он может быть описан с помощью такого приближённого равенства:

$$\sqrt{c} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}.$$

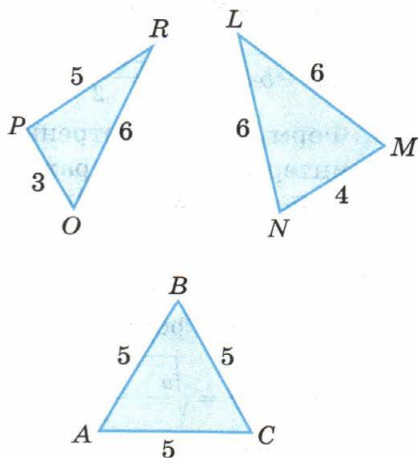


Рис. 2.35

Например, $\sqrt{28} = \sqrt{25 + 3} \approx 5 + \frac{3}{2 \cdot 5} = 5,3$. (С помощью калькулятора мы получили бы, что $\sqrt{28} \approx 5,29$.) Пользуясь указанной приближённой формулой, найдите $\sqrt{39}$, $\sqrt{85}$. Сравните ответ с числом, полученным с помощью калькулятора.

Преобразование выражений, содержащих квадратные корни

412 Найдите значение выражения при $a = 0,01$ и $b = 0,25$:

а) $a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$; в) $(10\sqrt{a})^2 - (4\sqrt{b})^2$;

б) $\frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$; г) $\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{1 - \frac{b-a}{b}}$.

413 Докажите, что:

а) $2\sqrt{300} + \sqrt{45} - 5\sqrt{48} = 3\sqrt{5}$; в) $\sqrt{84} - (3\sqrt{7} + 2\sqrt{3}) \cdot \sqrt{7} = -21$;

б) $3\sqrt{54} + \sqrt{96} - 2\sqrt{150} = 3\sqrt{6}$; г) $\sqrt{72} - (2\sqrt{6} - 4\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} = 12$.

414 Верно ли, что:

а) $(3\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 6\sqrt{6} = 21$; в) $4\sqrt{3} - (2\sqrt{3} + 1)^2 = -13$;

б) $(2\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 + \sqrt{160} = 22$; г) $55 - (5\sqrt{2} - \sqrt{5})^2 = 10\sqrt{10}$?

415 Освободитесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\frac{\sqrt{3}}{5 + 3\sqrt{3}}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{2} - 6}$; в) $\frac{\sqrt{7} + 2}{\sqrt{7} - 2}$; г) $\frac{\sqrt{10} - 3\sqrt{2}}{\sqrt{10} + 3\sqrt{2}}$.

416 Упростите выражение:

а) $\frac{\sqrt{3}}{3 - \sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{3 + \sqrt{6}}$; в) $\left(\frac{\sqrt{5} - 5\sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} + \sqrt{10} \right) \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \right)$;

б) $\sqrt{7} + \frac{\sqrt{7}}{2 + \sqrt{7}} \left(\frac{2 + \sqrt{7}}{2 - \sqrt{7}} - 2 - \sqrt{7} \right)$; г) $\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{5}}{3\sqrt{3} + \sqrt{5}} - \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{5}}{3\sqrt{3} - \sqrt{5}}$.

Сократите дробь (**417—418**).

417 а) $\frac{2\sqrt{ab}}{b\sqrt{a} + a\sqrt{b}}$; в) $\frac{x-1}{1+2\sqrt{x}+x}$; д) $\frac{1 - (\sqrt{a})^3}{1 - \sqrt{a}}$;

б) $\frac{b\sqrt{a} - a\sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}$; г) $\frac{4 - 4\sqrt{a} + a}{4 - a}$; е) $\frac{9 - 3\sqrt{x} + x}{27 + (\sqrt{x})^3}$.

418 а) $\frac{2 - 3\sqrt{a} + a}{6 - 3\sqrt{a}}$; б) $\frac{3 - 2\sqrt{x} - x}{9 + 3\sqrt{x}}$.

Указание. а) Введите замену $y = \sqrt{a}$ и выполните разложение на множители.

419 Упростите выражение при $a < 0$, $b > 0$:

а) $2a^2\sqrt{a^2b^6} + b\sqrt{a^6b^4}$; б) $a\sqrt{a^4b^3} - 3b\sqrt{a^6b}$.

● **Вероятность, статистика, комбинаторика**

420 По данным Федеральной службы государственной статистики, в 2009 г. в России железнодорожным транспортом перевезено 3121,3 млн тонн грузов. Распределение перевозок грузов по отдельным видам экономической деятельности представлено в таблице.

Вид экономической деятельности	Перевезено грузов, млн т
Добыча топливно-энергетических полезных ископаемых	313,9
Добыча полезных ископаемых, кроме топливно-энергетических	676,3
Производство пищевых продуктов	25,2
Обработка древесины и производство изделий из дерева	8,1
Целлюлозно-бумажное производство, издательская и полиграфическая деятельность	19,2
Химическое производство	81,9
Производство прочих неметаллических минеральных продуктов	92,8
Металлургическое производство и производство готовых металлических изделий	591,3
Производство и распределение электроэнергии, газа и воды	123,2
Строительство	21,2
Транспорт и связь	963,5

1) Постройте по этим данным столбчатую диаграмму.

2) Определите:

а) какая часть всех перевозок связана с добычей полезных ископаемых;

б) какой процент всех перевозок приходится на металлургическое производство.

421 ■ ЭКСПЕРИМЕНТИРУЕМ ■ Выберите какое-нибудь литературное произведение, написанное в прозе, и определите частоту появления в этом произведении такой части речи, как определение.

Для этого откройте произведение на какой-нибудь странице, не содержащей заголовков, и подсчитайте общее количество слов, включая предлоги. Подсчитайте общее количество определений на этой странице. Заполните таблицу.

Страница	1	2	3	4	5	Итого
Всего слов						
Всего определений						

Используя полученные данные, вычислите частоту появления определения в этом произведении.

422 а) Четыре друга по одному входят в автобус. Сколько существует различных вариантов очередности?

б) В студии танца занимаются 5 девочек и 4 мальчика. Сколькими способами можно составить пару из мальчика и девочки?

Чему вы научились

Это надо знать (основные теоретические сведения)

- 1 Запишите формулу для нахождения стороны a квадрата по его площади S . Найдите a , если $S = 25; 36; 0,01$.
- 2 Существует ли рациональное число, квадрат которого равен 2?
К какому классу чисел относится число $\sqrt{2}$? Закончите равенство $(\sqrt{2})^2 = \dots$
- 3 Приведите примеры натуральных чисел, которые нельзя представить в виде квадрата рационального числа. Запишите число, квадрат которого равен 8; 10; 101. Запишите число, противоположное каждому из них.
- 4 Покажите, как с помощью теоремы Пифагора построить отрезок, длина которого равна $\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5}$.
- 5 Дайте определение квадратного корня. Приведите примеры. Сколько существует квадратных корней из положительного числа a ? Как они обозначаются? Существует ли квадратный корень из отрицательного числа? Какой квадратный корень называют арифметическим?

- 6 Сколько корней имеет уравнение $x^2 = a$, если: $a > 0$; $a = 0$; $a < 0$? Решите уравнение: $x^2 = 16$; $x^2 = 10$; $x^2 = 0$; $x^2 = -9$.
- 7 Запишите с помощью букв теорему о корне из произведения. Примените её к выражению $\sqrt{225 \cdot 144}$.
- 8 Запишите с помощью букв теорему о корне из частного. Примените её к выражению $\sqrt{\frac{196}{25}}$.
- 9 Объясните:
 - а) как вынести множитель из-под знака корня в выражении $\sqrt{128}$;
 - б) как внести множитель под знак корня в выражении $5\sqrt{3}$.

Это надо уметь (обязательные результаты обучения)

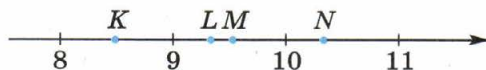
- 1 Вычислите: а) $\sqrt{81}$; б) $\sqrt{\frac{9}{16}}$; в) $\sqrt{0,64}$.
- 2 Найдите значение выражения:
 - а) $\sqrt{\frac{x-y}{2}}$ при $x = 126$, $y = 54$; в) $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{3}$ при $x = 0,25$, $y = 0,01$.
 - б) $\frac{\sqrt{x+y}}{5}$ при $x = 27$, $y = 22$;
- 3 Площадь квадрата, диагональ которого равна b , можно вычислить по формуле $S = \frac{b^2}{2}$. Выразите из этой формулы диагональ квадрата b .
- 4 Между какими последовательными целыми числами заключено число: $\sqrt{18}$, $\sqrt{89}$, $\sqrt{160}$?
- 5 Сравните числа: а) $\sqrt{26}$ и $\sqrt{62}$; б) $\sqrt{234}$ и 16; в) $-\sqrt{5}$ и $-\sqrt{6}$.
- 6 Покажите на координатной прямой примерное положение чисел $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{52}$, $-\sqrt{52}$.
- 7 Пользуясь калькулятором, укажите две последовательные десятичные дроби с двумя знаками после запятой, между которыми заключено число $\sqrt{32}$.
- 8 Чему равно расстояние между домами A и B , расположенными на двух взаимно перпендикулярных улицах, если дом A расположен в 2 км от перекрёстка, а дом B — в 1,5 км от этого перекрёстка?

- 9 а) Найдите квадратные корни из числа: 64 ; $\frac{4}{9}$; $0,49$; 3 ; $2,7$.
 б) Найдите арифметический квадратный корень из числа: 100 ; $\frac{1}{4}$; $0,09$; 5 .
- 10 Решите уравнение:
 а) $x^2 = 64$; в) $x^2 + 25 = 0$; д) $(x - 1)^2 = 9$;
 б) $x^2 - 144 = 0$; г) $x^2 - 5 = 0$; е) $(x + 5)^2 = 0$.
- 11 Вычислите, не пользуясь калькулятором:
 а) $\sqrt{0,25 \cdot 0,36}$; б) $\sqrt{\frac{256}{81}}$; в) $\sqrt{3^2 \cdot 5^4 \cdot 2^6}$.
- 12 Упростите выражение:
 а) $5\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{20}$; в) $\frac{(2\sqrt{5})^2}{10}$; г) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{50}}$; д) $\frac{2\sqrt{10} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{80}}$.
- 13 Вынесите множитель из-под знака корня в выражении $0,5\sqrt{32}$.
- 14 Внесите множитель под знак корня в выражении: $4\sqrt{2}$, $-2\sqrt{3}$.
- 15 Сравните числа $5\sqrt{3}$ и $3\sqrt{6}$.
- 16 Упростите выражение:
 а) $3\sqrt{20} - 3\sqrt{45} + 4\sqrt{5}$; б) $(1 + \sqrt{3})^2$; в) $(\sqrt{7} - 2)(\sqrt{7} + 2)$.
- 17 Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{6}{\sqrt{3}}$.
- 18 Найдите значение выражения $2y^2 - 3$ при $y = 1 - \sqrt{2}$.
- 19 Найдите значение выражения $2y^3$ при $y = 2\sqrt{3}$.

Проверьте себя (тест)

- 1 Найдите значение выражения $2\sqrt{n+1}$ при $n = -\frac{3}{4}$.
- 2 Известно, что $\sqrt{a} = b$. Какое из следующих равенств верно?
 1) $a^2 = b$ 2) $a^2 = b^2$ 3) $a = b^2$ 4) $a = \sqrt{b}$
- 3 Расстояние h , которое пролетает тело при свободном падении, вычисляется по формуле $h = \frac{gt^2}{2}$, где g — ускорение свободного падения, t — время падения. Выразите из этой формулы время t .

- 4 Какое из чисел $\sqrt{121}$, $\sqrt{0,4}$, $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ является иррациональным?
- 5 Одна из точек K , L , M и N на координатной прямой соответствует числу $\sqrt{86}$. Какая это точка?



- 6 Какое из чисел заключено между числами $\sqrt{5}$ и $\sqrt{10}$?
1) 6 2) 4 3) 3 4) 2
- 7 При каком значении m выражение $\sqrt{1-m}$ не имеет смысла?
1) при $m = -2$ 2) при $m = 0$ 3) при $m = 1$ 4) при $m = 2$
- 8 Соотнесите уравнение с числом его корней.
Уравнения: А) $x^2 = 120$ Б) $x^2 = 0$ В) $x^2 = -100$
Число корней: 1) нет корней 2) 2 корня 3) 1 корень
- 9 Решите уравнение $x^2 - \frac{3}{4} = 0$.
- 10 Какая точка принадлежит графику функции $y = \sqrt{x}$?
1) $M(225; -15)$ 2) $N(64; 10)$ 3) $P(196; 14)$ 4) $Q(12; 144)$.
- 11 Расположите в порядке возрастания числа $0,3$; $\sqrt{0,3}$; $1,5$; $\sqrt{1,5}$.
- 12 Найдите значение выражения $\sqrt{15 \cdot 240}$.
- 13 Зная, что $33^2 = 1089$, определите, какое из следующих равенств неверно.
1) $\sqrt{1089} = 33$ 3) $\sqrt{10,89} = 3,3$
2) $\sqrt{108\,900} = 330$ 4) $\sqrt{1,089} = 0,33$
- 14 Найдите значение выражения $\frac{2\sqrt{21} \cdot 6\sqrt{35}}{7\sqrt{60}}$.
- 15 Выберите выражение, равное $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$.
1) $1-\sqrt{3}$ 2) $\sqrt{3}-1$ 3) $(1-\sqrt{3})^2$ 4) $(\sqrt{3}-1)^2$

16 Сократите дробь $\frac{2\sqrt{8} + 3\sqrt{20} - 6\sqrt{5}}{4\sqrt{3} - 2\sqrt{12} + \sqrt{18}}$.

17 Какое из следующих выражений не равно $\frac{2}{\sqrt{18}}$?

1) $\sqrt{\frac{1}{9}}$

2) $\sqrt{\frac{2}{9}}$

3) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

4) $\frac{2}{3\sqrt{2}}$

18 Упростите выражение $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$.

19 Найдите значение выражения $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$.

20 Укажите два последовательных целых числа, между которыми заключено число $\sqrt[3]{30}$.

Квадратные уравнения

Уравнение — важнейшее алгебраическое понятие, которое во многом определяет широту и многообразие применения алгебры. Знаменитый арабский математик IX в. Мухаммед аль-Хорезми писал, что уравнение необходимо людям «в случае раздела имущества, торговли и во всех их деловых взаимоотношениях или же в случае измерения земель, проведения каналов, геометрических вычислений и других предметов различного рода...».

И вы в этой главе будете решать задачи из самых разных областей жизни, сводящиеся к квадратным уравнениям. В задаче может идти речь о кукурузном поле, витрине магазина, бассейне; условие может касаться различных областей химии, физики, геометрии. Вам предстоит научиться на основании текста задачи составлять соответствующее уравнение, а решив его, обязательно осмыслить, что означают полученные результаты. Чтобы не получилось в ответе «два землекопа и две трети», как в шутовском стихотворении Самуила Маршака о нерадивом школяре.

3.1 Какие уравнения называют квадратными

1 Решим задачу:

Катеты прямоугольного треугольника меньше его гипотенузы соответственно на 2 см и на 4 см. Чему равны длины сторон этого треугольника?

Пусть длина гипотенузы равна x см, тогда длины катетов равны $x - 2$ см и $x - 4$ см. В соответствии с теоремой Пифагора

$$(x - 2)^2 + (x - 4)^2 = x^2.$$

Выполнив преобразования, получим уравнение

$$x^2 - 4x + 4 + x^2 - 8x + 16 = x^2,$$

т. е.

$$x^2 - 12x + 20 = 0.$$

Левая часть этого уравнения — многочлен второй степени. Такие уравнения вам решать ещё не приходилось. Чтобы найти его корни, мы воспользуемся специальным приёмом — выделим в левой его части *полный квадрат*, т. е. многочлен, который можно «свернуть» в квадрат двучлена.

Если к выражению $x^2 - 12x$ прибавить число 36, то получится трёхчлен $x^2 - 12x + 36$, равный $(x - 6)^2$. Поэтому прибавим

к левой части уравнения число 36, а чтобы равенство не нарушилось, одновременно вычтем его. Будем иметь

$$x^2 - 12x + 36 - 36 + 20 = 0,$$

$$(x - 6)^2 - 16 = 0,$$

$$(x - 6)^2 = 16.$$

Отсюда

$$x - 6 = 4 \text{ или } x - 6 = -4, \text{ т. е.}$$

$$x = 10 \text{ или } x = 2.$$

Таким образом, уравнение $x^2 - 12x + 20 = 0$ имеет два корня: 10 и 2. Однако условию задачи удовлетворяет только число 10. Действительно, если $x = 10$, то $x - 2 = 8$ и $x - 4 = 6$; если $x = 2$, то $x - 2 = 0$ и $x - 4 = -2$, т. е. при $x = 2$ значения выражений $x - 2$ и $x - 4$ не могут служить длинами сторон треугольника.

Итак, длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна 10 см, а длины катетов — 8 см и 6 см.

Уравнение $x^2 - 12x + 20 = 0$, которое мы составили по условию задачи, называют *квадратным*.

Определение

Квадратным уравнением называется уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где a , b и c — произвольные числа, причём $a \neq 0$.

Числа a , b и c — это *коэффициенты* квадратного уравнения. Число a называют первым или старшим коэффициентом, b — вторым коэффициентом, а c — свободным членом. Квадратное уравнение $x^2 - 12x + 20 = 0$ имеет коэффициенты $a = 1$, $b = -12$, $c = 20$.

Приведём ещё примеры квадратных уравнений:

$$5x^2 - 6x + 10 = 0, \quad \sqrt{2}x^2 - 5x = 0,$$

$$-x^2 + x - 4,5 = 0, \quad \frac{1}{3}x^2 - 12 = 0.$$

(Назовите коэффициенты каждого из них.)

2 Квадратное уравнение, первый коэффициент которого равен 1, называют *приведённым*. Так, приведёнными являются квадратные уравнения $x^2 - 12x + 20 = 0$, $x^2 - \frac{2}{3}x = 0$, $x^2 - \sqrt{50} = 0$.

Неприведённое квадратное уравнение всегда можно преобразовать в приведённое, имеющее те же корни. Для этого надо разделить обе его части на коэффициент при x^2 .

Например, уравнение $-2x^2 + 10x - 8 = 0$ можно заменить приведённым уравнением $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Чтобы решить уравнение $x^2 - 12x + 20 = 0$, составленное по условию задачи, мы воспользовались приёмом выделения квадрата двучлена. Решим ещё несколько квадратных уравнений этим же способом.

Пример 1. Решим уравнение $x^2 - 6x + 7 = 0$.

Так как $x^2 - 6x = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3$, то, чтобы получить в левой части уравнения квадрат двучлена, прибавим число 9 и вычтем его.

Получим

$$x^2 - 6x + 9 - 9 + 7 = 0,$$

$$(x - 3)^2 - 2 = 0,$$

$$(x - 3)^2 = 2.$$

Отсюда

$$x - 3 = \sqrt{2} \text{ или } x - 3 = -\sqrt{2},$$

$$x = 3 + \sqrt{2} \text{ или } x = 3 - \sqrt{2}.$$

Итак, уравнение имеет два корня: $3 + \sqrt{2}$ и $3 - \sqrt{2}$.

Пример 2. Решим уравнение $x^2 - 10x + 25 = 0$.

Так как $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$, то уравнение можно записать в виде $(x - 5)^2 = 0$. Отсюда $x - 5 = 0$, т. е. $x = 5$. Значит, уравнение имеет один корень — число 5.

Пример 3. Решим уравнение $2x^2 + 6x + 5 = 0$.

Преобразуем сначала уравнение в приведённое. Для этого разделим обе его части на 2. Получим

$$x^2 + 3x + \frac{5}{2} = 0.$$

Теперь выделим в левой части уравнения квадрат двучлена:

$$x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + \frac{5}{2} = 0,$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = 0,$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}.$$

Левая часть уравнения при любом x неотрицательна, а в правой части записано отрицательное число. Значит, уравнение корней не имеет.

□ Сформулируйте определение квадратного уравнения. Назовите коэффициенты a , b и c квадратных уравнений $0,3x^2 - 5x + 8 = 0$, $x^2 - x + 1 = 0$ и $3x^2 = 0$ (фрагмент 1). Приведите свой пример квадратного уравнения.

- Какое квадратное уравнение называется приведённым (фрагмент 2)? Приведите пример приведённого и неприведённого квадратного уравнения. Замените уравнение $-3x^2 - 6x + 3 = 0$ приведённым квадратным уравнением, имеющим те же корни.
- Разберите, как решено уравнение в примере 1. Решите этим же приёмом уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$.

А

423 Укажите коэффициенты a , b и c квадратного уравнения:

а) $7x^2 - 8x + 4 = 0$; в) $-x^2 + 3x = 0$;

б) $-2x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$; г) $x^2 - 12 = 0$.

424 Составьте квадратные уравнения, если известны их коэффициенты:

а) $a = 3$, $b = 8$, $c = 2$ и $a = 8$, $b = 2$, $c = 3$;

б) $a = 1$, $b = 0,5$, $c = -1$ и $a = -1$, $b = 1$, $c = 0,5$;

в) $a = 5$, $b = 0$, $c = -3$ и $a = -3$, $b = 5$, $c = 0$.

Может ли коэффициент a в квадратном уравнении быть равным 0?

425 Покажите, что:

а) числа -7 и 5 являются корнями уравнения $x^2 + 2x - 35 = 0$;

б) число $\frac{2}{3}$ является корнем уравнения $3x^2 + x - 2 = 0$, а число -2 не является;

в) числа $1 - \sqrt{2}$ и $1 + \sqrt{2}$ являются корнями уравнения $x^2 - 2x - 1 = 0$;

г) число $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ является корнем уравнения $x^2 - x - 1 = 0$,

а число $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ нет.

426 Решите уравнения:

$(x + 5)^2 = 4$, $(x - 2)^2 = 3$, $(x + 7)^2 = 0$, $(x - 6)^2 = -9$.

427 Подберите недостающий член квадратного трёхчлена так, чтобы его можно было представить в виде квадрата двучлена:

а) $x^2 + 8x + \dots$; в) $z^2 + 3z + \dots$;

б) $x^2 - 18x + \dots$; г) $a^2 + a + \dots$.

428 Заполните пропуски в цепочке равенств:

а) $x^2 + 4x - 1 = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + \dots - \dots - 1 = (x + \dots)^2 - \dots$;

б) $a^2 - 6a + 15 = a^2 - 2 \cdot 3 \cdot a + \dots - \dots + 15 = (a - \dots)^2 + \dots$;

$$в) b^2 - 3b + 3 = b^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot b + \dots - \dots + 3 = (\dots - \dots)^2 + \dots;$$

$$г) p^2 - 7p - 10 = p^2 - 2 \cdot \frac{7}{2} \cdot p + \dots - \dots - 10 = (\dots - \dots)^2 - \dots.$$

429 Решите уравнение, выделив квадрат двучлена:

$$а) x^2 + 12x + 20 = 0; \quad в) z^2 - 6z + 9 = 0;$$

$$б) y^2 + 14y + 24 = 0; \quad г) y^2 - 2y + 3 = 0.$$

Подсказка. В качестве образцов используйте примеры 1 и 2.

Б

430 Составьте все возможные квадратные уравнения, коэффициентами которых являются числа:

$$а) 8; 2 \text{ и } -3; \quad б) 5; 1 \text{ и } 0.$$

431 Решите уравнение:

$$а) 3x^2 - 4x - 4 = 0; \quad г) x^2 - 2x + 2 = 0;$$

$$б) 2x^2 + 3x + 6 = 0; \quad д) 2x^2 + 7x + 6 = 0;$$

$$в) 9x^2 - 6x + 1 = 0; \quad е) 4x^2 - 12x + 9 = 0.$$

Подсказка. Воспользуйтесь образцом, приведённым в примере 3.

432 ■ **РАССУЖДАЕМ** ■ Составьте какое-нибудь квадратное уравнение, которое:

а) не имеет корней;

б) имеет два целых корня;

в) имеет два иррациональных корня;

г) имеет один корень.

433 Выделите в трёхчлене квадрат двучлена:

$$а) x^2 - 2x + c; \quad б) x^2 + bx + c.$$

434 ■ **ДОКАЗЫВАЕМ** ■ Покажите, что:

а) числа m и n являются корнями уравнения

$$x^2 - (m + n)x + mn = 0;$$

б) числа $m + n$ и $m - n$ являются корнями уравнения

$$x^2 - 2mx + m^2 - n^2 = 0.$$

Составьте уравнения такого вида, подставив вместо m и n конкретные числа, и укажите корни каждого составленного уравнения.

3.2 Формула корней квадратного уравнения

1 До сих пор мы решали квадратные уравнения выделением квадрата двучлена. Однако этот способ довольно трудоёмок и в практическом отношении не очень удобен. Поэтому мы выведем формулу корней квадратного уравнения, решив его в общем виде.

Итак, рассмотрим уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$. Выделим в левой его части квадрат двучлена. Для этого:

преобразуем уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ в приведённое:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0;$$

представим второе слагаемое в виде удвоенного произведения, в котором один из множителей есть x :

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0;$$

прибавим к левой части уравнения выражение $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ и вычтем его:

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0;$$

три первых слагаемых «свернём» в квадрат двучлена:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0;$$

остальные слагаемые перенесём в правую часть уравнения и запишем правую часть в виде дроби:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Дальше мы должны будем рассмотреть различные случаи, которые определяются тем, каков знак правой части уравнения. Так как знаменатель дроби $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ положителен, то её знак зависит от знака числителя, т. е. от знака выражения $b^2 - 4ac$. Это выражение обозначают специальным символом — буквой D :

$$b^2 - 4ac = D.$$

Запишем уравнение, используя введённое обозначение:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}.$$

Понятно, что возможны три случая: $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$.

1. Пусть $D > 0$, а значит, $\frac{D}{4a^2} > 0$. Существуют два квадратных корня из этого числа: $\frac{\sqrt{D}}{2a}$ и $-\frac{\sqrt{D}}{2a}$.

Отсюда $x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{2a}$ или $x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{D}}{2a}$,

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} \text{ или } x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a},$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \text{ или } x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Таким образом,

если $D > 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня.

Корни квадратного уравнения принято обозначать символами x_1 и x_2 .

2. Пусть $D = 0$. Тогда уравнение примет вид

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

Отсюда

$$x + \frac{b}{2a} = 0, \quad x = -\frac{b}{2a}.$$

Значит,

если $D = 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет один корень.

3. Пусть $D < 0$, тогда $\frac{D}{4a^2} < 0$. Но левая часть уравнения при любом x неотрицательна. Значит,

если $D < 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ корней не имеет.

Таким образом, существование корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и их число зависят от знака выражения $D = b^2 - 4ac$. Его называют *дискриминантом квадратного уравнения*. Термин «дискриминант» произошёл от латинского слова *discriminare*, что в переводе означает «различать», «разделять». По дискриминанту квадратного уравнения можно узнать, имеет ли это уравнение корни или нет, а если имеет, то сколько — два корня или один.

Для корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с положительным дискриминантом принята такая краткая запись:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ где } D = b^2 - 4ac.$$

Именно её и называют *формулой корней квадратного уравнения*. Заметим, что этой формулой можно пользоваться и для отыскания корня квадратного уравнения, у которого $D = 0$.

При решении квадратного уравнения по формуле обычно сначала вычисляют дискриминант и сравнивают его с нулём. После этого в зависимости от результата либо находят корни по формуле, либо делают вывод об отсутствии корней.

Приведём примеры решения квадратных уравнений.

Пример 1. Решим уравнение $6x^2 - x - 2 = 0$.

Вычислим дискриминант:

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2) = 1 + 48 = 49, \text{ т. е. } D > 0.$$

Воспользуемся формулой корней:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{12}; \quad x = \frac{1 \pm 7}{12};$$

$$x_1 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}.$$

Ответ. $\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}$.

Пример 2. Решим уравнение $-x^2 + 2x - 2 = 0$.

Сначала поменяем знаки всех членов уравнения на противоположные, умножив обе его части на -1 . Так целесообразно поступать всегда при решении уравнений с отрицательным первым коэффициентом. Получим уравнение

$$x^2 - 2x + 2 = 0.$$

Найдём дискриминант:

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4; \quad D < 0.$$

Ответ. Уравнение корней не имеет.

Пример 3. Решим уравнение $x^2 + 0,2x + 0,01 = 0$.

Преобразуем уравнение так, чтобы его коэффициенты стали целыми числами. Для этого умножим обе его части на 100. Получим

$$100x^2 + 20x + 1 = 0.$$

Найдём дискриминант: $D = 20^2 - 4 \cdot 100 \cdot 1 = 0$.

По формуле корней получим $x = \frac{-20 \pm \sqrt{0}}{200}$, т. е. $x = -0,1$.

Ответ. $-0,1$.

Заметим, что последнее уравнение можно решить проще, если увидеть, что трёхчлен в левой его части можно «свернуть» в квад-

рат двучлена. Тогда уравнение примет вид $(10x + 1)^2 = 0$. Значит, $10x + 1 = 0$, т. е. $x = -0,1$.

- 3 В заключение заметим, что решением квадратных уравнений учёные занимались ещё в глубокой древности, более двух тысячелетий тому назад. Интересно, что математики Древней Греции рассматривали три вида квадратных уравнений, а не один, как мы это сделали сейчас. В современной записи они выглядели бы так:

$$ax^2 + bx = c, \quad ax^2 + c = bx, \quad ax^2 = bx + c.$$

Такие уравнения появлялись у них при решении задач, и каждое решалось особым способом — геометрически. А об общей формуле корней они даже и не задумывались — алгебры в то время ещё не было.

Почему же у древнегреческих математиков было больше видов квадратных уравнений, чем у нас? Всё дело в том, что они ещё не знали отрицательных чисел, не умели переносить члены уравнения из одной части в другую — всё это появилось в процессе развития алгебры лишь много веков спустя. Благодаря Франсуа Виету, создателю современной символики алгебры, три «древних» вида квадратных уравнений слились в один: $ax^2 + bx + c = 0$. Но ещё за несколько веков до Ф. Виета учёный из Средней Азии аль-Хорезми научил математиков правилам переноса слагаемых из одной части уравнения в другую.

- Какое выражение называют дискриминантом квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$? Каково происхождение термина «дискриминант» (найдите объяснение в тексте фрагмента 1)?
- Сколько корней может иметь квадратное уравнение и как это зависит от дискриминанта? (Найдите эту информацию в тексте фрагмента 1.) Для каждого уравнения определите, имеет ли оно корни, и если имеет, то сколько: а) $3x^2 + 2x - 1 = 0$; б) $2x^2 - 5x + 4 = 0$; в) $25x^2 + 10x + 1 = 0$.
- Запишите формулу корней квадратного уравнения. Решите по формуле уравнение $3x^2 - 5x - 2 = 0$, пользуясь примером 1 как образцом.

A

- 435 Вычислив дискриминант, определите, имеет ли уравнение корни и сколько:

а) $x^2 + 7x - 18 = 0$;	г) $5y^2 - 3y + 2 = 0$;
б) $a^2 + a + 6 = 0$;	д) $9x^2 + 12x + 4 = 0$;
в) $4x^2 - 4x + 1 = 0$;	е) $z^2 - z - 3 = 0$.

Убедитесь, что уравнение имеет два корня, и найдите эти корни (436—437).

- 436** а) $2x^2 + 3x + 1 = 0$; д) $2z^2 + 5z + 3 = 0$;
 б) $3y^2 + 7y - 6 = 0$; е) $2z^2 - 9z - 5 = 0$;
 в) $4z^2 - 11z - 3 = 0$; ж) $7y^2 + 9y + 2 = 0$;
 г) $3x^2 + 7x + 2 = 0$; з) $6x^2 - 13x - 5 = 0$.
- 437** а) $x^2 + 5x - 6 = 0$; д) $x^2 - 4x - 21 = 0$;
 б) $x^2 + 3x + 2 = 0$; е) $x^2 + 9x + 18 = 0$;
 в) $z^2 - 2z - 3 = 0$; ж) $a^2 - 7a + 6 = 0$;
 г) $t^2 + t - 6 = 0$; з) $b^2 - 4b - 60 = 0$.

■ ДЕЙСТВУЕМ ПО ФОРМУЛЕ (438—441) ■ Решите уравнение:

- 438** а) $2x^2 - 3x - 5 = 0$; д) $-2x^2 + 13x - 21 = 0$;
 б) $y^2 - 4y + 5 = 0$; е) $y^2 + 5y - 50 = 0$;
 в) $5z^2 - 2z - 3 = 0$; ж) $x^2 - 18x + 81 = 0$;
 г) $-x^2 - x + 20 = 0$; з) $-7x^2 + 5x + 2 = 0$.
- 439** а) $10x^2 + 30x + 20 = 0$; в) $1,5y^2 + 4y + 2,5 = 0$;
 б) $-2x^2 - 10x - 8 = 0$; г) $-0,8z^2 + 0,4z + 2,4 = 0$.

Совет. Упростите уравнение, разделив обе его части на одно и то же число.

- 440** а) $3z^2 = 198 + 15z$; г) $0,3y^2 + 1,4 = -1,3y$;
 б) $11v = 3 + 10v^2$; д) $0,1 + 0,03x^2 = 0,17x$;
 в) $8z^2 = 22z + 6$; е) $75 - 35z = 10z^2$.
- 441** а) $x^2 - 2x - 1 = 0$; г) $2x^2 + 2x - 1 = 0$;
 б) $4x^2 - 8x - 1 = 0$; д) $x^2 - 6x + 6 = 0$;
 в) $x^2 - 2x - 4 = 0$; е) $x^2 - 12x + 18 = 0$.

■ РАССУЖДАЕМ (442—443) ■

- 442** Вычислите дискриминант уравнения и ответьте на следующие вопросы: 1) имеет ли уравнение корни; 2) если имеет, то сколько; 3) рациональными или иррациональными числами являются корни?

- а) $4x^2 - 12x + 9 = 0$; д) $x^2 - 3x + 5 = 0$;
 б) $2x^2 + 3x - 9 = 0$; е) $3x^2 + 2x - 2 = 0$;
 в) $5x^2 - x + 2 = 0$; ж) $3x^2 - 11x + 10 = 0$;
 г) $x^2 + 7x - 1 = 0$; з) $25x^2 + 10x + 1 = 0$.

- 443** Подберите какое-нибудь значение c , при котором уравнение имеет корни, и значение c , при котором оно не имеет корней:

- а) $x^2 - 3x + c = 0$; б) $5x^2 - 2x + c = 0$.

Б

444 Найдите корни уравнения и укажите их приближённые значения с двумя знаками после запятой (воспользуйтесь калькулятором):

- а) $x^2 - 6x = 1$; г) $5x - 2 = 3x^2$;
 б) $3x^2 = 7x + 3$; д) $2x^2 + 4x + 1 = 0$;
 в) $x^2 + 11x = x - 2$; е) $4 - 4x = x^2$.

445 Решите уравнение:

- а) $2z^3 - z^2 - 10z = 0$; в) $3y^4 - 6y^3 + 3y^2 = 0$;
 б) $10x^4 + 3x^3 - 18x^2 = 0$; г) $4u^3 - 12u^2 + 9u = 0$.

Подсказка. Левую часть уравнения разложите на множители.

446 Найдите корни уравнения:

- а) $x^2(x - 3) - 10x(x - 3) - 24(x - 3) = 0$;
 б) $3z^2(z - 1) + 10z(z - 1) + 8(1 - z) = 0$;
 в) $y^2(y + 2) + 2y(y + 2) - 15(y + 2) = 0$;
 г) $2u^2(u + 5) - 3u(u + 5) - 9(u + 5) = 0$.

447 Определите, сколько корней имеет уравнение:

- а) $(4x^2 + x + 1)(x^2 - 9x + 4) = 0$;
 б) $(x^2 - 4x + 5)(2x^2 - 3x + 2) = 0$;
 в) $(3x^2 - 5x + 2)(2x^2 + 3x - 1) = 0$;
 г) $(36x^2 - 12x + 1)(5x^2 - 2x - 3) = 0$;
 д) $(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 2x - 3) = 0$.

448 ■ ИССЛЕДУЕМ ■

1) Выясните, имеет ли корни уравнение $193x^2 + 93x + 10 = 0$. Используя полученный результат, установите, имеют ли корни следующие уравнения:

$$193x^2 - 93x + 10 = 0, 10x^2 + 93x + 193 = 0, 10x^2 - 93x + 193 = 0.$$

2) Запишите какое-нибудь квадратное уравнение, которое имеет тот же дискриминант, что и уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ (коэффициенты отличны от 0).

3.3 Вторая формула корней квадратного уравнения

Квадратные уравнения, у которых второй коэффициент — чётное число, удобно решать по формуле корней, записанной в другом, более простом виде.

Рассмотрим квадратное уравнение, которое имеет вид

$$ax^2 + 2kx + c = 0, \text{ где } k — \text{ целое число.}$$

Найдём его дискриминант:

$$D = 4k^2 - 4ac = 4(k^2 - ac).$$

Знак произведения $4(k^2 - ac)$ зависит от знака выражения $k^2 - ac$. Следовательно, вывод о числе корней уравнения можно сделать по знаку выражения $k^2 - ac$.

Будем называть выражение $k^2 - ac$ *сокращённым дискриминантом* и обозначим его знаком D_1 :

$$D_1 = k^2 - ac.$$

Если $D_1 > 0$, то по общей формуле корней квадратного уравнения будем иметь

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4D_1}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{D_1}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}.$$

Заменив k на $\frac{b}{2}$, получим следующую формулу:

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{ где } D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac.$$

Её называют *формулой корней квадратного уравнения с чётным вторым коэффициентом*.

Понятно, что если $D_1 < 0$, то уравнение корней не имеет.

Пример. Решим уравнение $5x^2 - 8x + 3 = 0$:

$$D_1 = (-4)^2 - 5 \cdot 3 = 16 - 15 = 1; D_1 > 0;$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{1}}{5}; \quad x = \frac{4 \pm 1}{5}.$$

Ответ. 1; $\frac{3}{5}$.

При решении квадратного уравнения целесообразно выбирать ту формулу, которая в данном случае удобна. В то же время общая формула корней квадратного уравнения применима в любом случае.

- Найдите в тексте учебника примеры квадратного уравнения с чётным вторым коэффициентом. Запишите формулу корней квадратного уравнения с чётным вторым коэффициентом.
- Решите уравнение $3x^2 + 4x - 4 = 0$, используя сначала формулу корней квадратного уравнения с чётным коэффициентом, а потом общую формулу.

А

449 ■ ДЕЙСТВУЕМ ПО ФОРМУЛЕ ■ Решите уравнение, используя формулу корней квадратного уравнения с чётным коэффициентом при x :

а) $x^2 + 6x - 27 = 0$;

д) $2x^2 + 3x = 42 - 5x$;

б) $3x^2 + 10x - 8 = 0$;

е) $6x + 24 = 9x^2$;

в) $5x^2 = 6x + 8$;

ж) $16x^2 = 16x + 5$;

г) $3x^2 + 13x = 2x^2 - x - 49$;

з) $-5x^2 + 20 = 14x - 4$.

Решите уравнение (450—451).

450 а) $(x - 2)(x - 6) = 5$;

д) $(3x - 2)(x + 6) = -9$;

б) $(y - 2)(y + 5) = -12$;

е) $(u + 3)(u - 4) = -10$;

в) $(x - 3)^2 = 5 - x$;

ж) $(x + 4)^2 = 7 - 2x$;

г) $6x - 20 = (x - 6)^2$;

з) $(z + 6)^2 = 8(3z + 8)$.

451 а) $0,3x^2 + 1,6x - 1,2 = 0$;

д) $0,1y^2 - 0,9y + 0,8 = 0$;

б) $x^2 - \frac{2}{3}x = \frac{8}{3}$;

е) $\frac{7}{20} - \frac{1}{5}x = x^2$;

в) $\frac{z^2 + z}{2} = 15$;

ж) $5x^2 = \frac{1 - 5x}{10}$;

г) $x^2 + 1 = \frac{5x}{2}$;

з) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}x = 3$.

452 Найдите значения переменной a , при которых:

а) значение выражения $5a^2 + 5a - 6$ равно 24;

б) значение выражения $a(a - 4)$ равно 60.

Б

Решите уравнение (453—456).

453 а) $15x^2 - 34x + 15 = 0$;

б) $29x^2 + 34x + 5 = 0$.

454 а) $(x - 5)(x + 2) = x(5 - x)$;

в) $3(z - 2)^2 = 2z + 4$;

б) $(y + 2)^2 = y(3y + 2)$;

г) $5 - 4x = 4(x - 1)^2$.

455 а) $(x - 4)^2 = \frac{40 - 6x}{3}$;

б) $\frac{(x - 3)^2}{5} = (x - 1)^2$.

456 а) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 5 = 0$;

в) $x^2 + 2\sqrt{6}x - 18 = 0$;

б) $x^2 + 2\sqrt{7}x + 7 = 0$;

г) $x^2 - 2\sqrt{2}x - 6 = 0$.

Указание. Воспользуйтесь формулой корней квадратного уравнения с чётным вторым коэффициентом.

457 ■ РАЗБИРАЕМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ■ Уравнение вида

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

где $a \neq 0$, называется *биквадратным уравнением*.

Решим уравнение $x^4 + 3x^2 - 28 = 0$.

Решение. Введём замену $x^2 = y$, получим квадратное уравнение относительно y : $y^2 + 3y - 28 = 0$. Решив его, найдём корни: $y_1 = 4$, $y_2 = -7$. Теперь решим уравнения $x^2 = 4$ и $x^2 = -7$:

1) $x^2 = 4$; $x_1 = 2$, $x_2 = -2$;

2) $x^2 = -7$; уравнение корней не имеет.

Ответ. 2; -2.

Решите биквадратное уравнение:

а) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$; в) $x^4 + 15x^2 - 16 = 0$;

б) $y^4 - 5y^2 + 4 = 0$; г) $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$.

458 Сколько корней может иметь биквадратное уравнение? Объясните свой ответ.

■ ИЩЕМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ (459–461) ■

459 Решите уравнение:

а) $x + \sqrt{x} - 6 = 0$; в) $x - 4\sqrt{x} + 3 = 0$;

б) $x - \sqrt{x} + 3 = 0$; г) $x - 9\sqrt{x} + 20 = 0$.

Указание. а) Введите замену $\sqrt{x} = y$.

460 Решите уравнение (введите подходящую замену):

а) $(x^2 - x - 1)^2 - 10(x^2 - x - 1) + 9 = 0$;

б) $(x^2 - 4x + 3)^2 + 6(x^2 - 4x + 6) - 34 = 0$.

461 Найдите корни уравнения и покажите их примерное расположение на координатной прямой:

а) $(x^2 - 2x + 1)^2 - 11(x^2 - 2x + 1) + 30 = 0$;

б) $(x^2 + 4x)^2 - 4(x^2 + 4x) - 5 = 0$.

462 ■ ВЫВОДИМ НОВУЮ ФОРМУЛУ ■ Корни приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ можно найти по формуле

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Выведите эту формулу.

463 Решите уравнение, используя формулу, выведенную в предыдущем задании:

а) $x^2 - 16x + 15 = 0$; в) $x^2 + 5x - 3 = 0$;

б) $x^2 + 8x - 9 = 0$; г) $x^2 - 9x + 17 = 0$.

464 ■ ИССЛЕДУЕМ ■

1) а) Дано уравнение $2x^2 - 7x + 3 = 0$. Запишите новое уравнение, поменяв местами в данном уравнении коэффициенты a и c . Решите оба уравнения. Как связаны между собой их корни?

б) Докажите, что если числа m и n — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$ и $c \neq 0$), то корнями уравнения $cx^2 + bx + a = 0$ являются числа $\frac{1}{m}$ и $\frac{1}{n}$.

Указание. Для доказательства воспользуйтесь подстановкой чисел $\frac{1}{m}$ и $\frac{1}{n}$ в соответствующее уравнение.

в) Составьте квадратное уравнение, корни которого обратны корням уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$. Проверьте себя, решив эти уравнения.

2) а) Решите уравнения $2x^2 + 3x - 5 = 0$ и $2x^2 - 3x - 5 = 0$. Как связаны между собой их корни?

б) Докажите, что если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни m и n , то корни уравнения $ax^2 - bx + c = 0$ — числа $-m$ и $-n$.

в) Составьте квадратное уравнение, корни которого противоположны корням уравнения $2x^2 - x - 1 = 0$. Проверьте себя, решив оба уравнения.

3.4 Решение задач

1 Пример 1. Решим задачу:

Из прямоугольного листа жести надо изготовить противень, вырезав по углам квадраты и загнув края вверх. Лист имеет размер 39×24 см. Чему должна быть равна сторона вырезаемого квадрата, чтобы дно противня имело площадь 700 см^2 ?

Решение. Пусть x см — длина стороны квадрата, который надо вырезать. Тогда $39 - 2x$ см — длина дна противня, $24 - 2x$ см — ширина дна противня (рис. 3.1).

Составим уравнение и решим его:

$$\begin{aligned}(39 - 2x)(24 - 2x) &= 700; \\ 936 - 126x + 4x^2 &= 700; \\ 4x^2 - 126x + 236 &= 0; \\ 2x^2 - 63x + 118 &= 0; \\ D &= 3969 - 4 \cdot 2 \cdot 118 = 3025; \\ x &= \frac{63 \pm 55}{4}; \quad x_1 = 29,5, \quad x_2 = 2.\end{aligned}$$

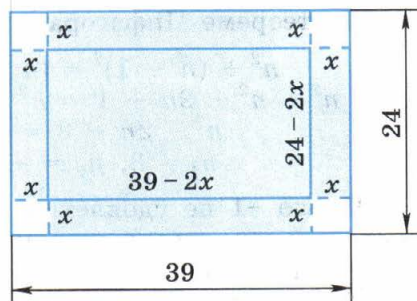
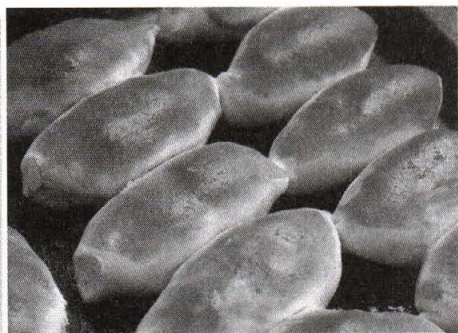


Рис. 3.1

От листа жести, одна из сторон которого 24 см, квадрат со стороной 29,5 см отрезать невозможно. Поэтому, хотя число 29,5 — корень уравнения, оно не является решением задачи.

Второй корень не противоречит условию задачи. В самом деле, если по углам листа вырезать квадраты со стороной 2 см, то размеры дна будут $24 \text{ см} - 4 \text{ см} = 20 \text{ см}$, $39 \text{ см} - 4 \text{ см} = 35 \text{ см}$, а его площадь будет равна $20 \text{ см} \cdot 35 \text{ см} = 700 \text{ см}^2$.

Ответ. 2 см.

Проведённое рассуждение типично для решения текстовой задачи. В задаче описывается некоторая жизненная ситуация, и составленное уравнение представляет собой математическую модель этой ситуации. Но эта модель не полностью отражает имеющиеся реальные условия. Например, никак не учтено, что $0 < x < 12$. Поэтому, найдя корни уравнения, нам пришлось проверить их на соответствие условию задачи и отбросить тот, который ему не отвечает.

Конечно, при переводе текстовых задач на математический язык можно пытаться полностью учитывать все условия. Однако всё учесть не всегда возможно. Кроме того, модель может получиться такой сложной, что с ней трудно будет работать. Поэтому лучше составить простую модель и затем исследовать полученные решения на их соответствие реальным данным задачи.

2 Пример 2. Длины сторон египетского треугольника выражаются последовательными натуральными числами 3, 4 и 5. Существует ли ещё какой-нибудь прямоугольный треугольник, длины сторон которого также выражаются последовательными натуральными числами?

Решение. Пусть длины сторон прямоугольного треугольника выражаются числами n , $n + 1$, $n + 2$ (рис. 3.2).

По теореме Пифагора

$$\begin{aligned}n^2 + (n + 1)^2 &= (n + 2)^2; \\n^2 + n^2 + 2n + 1 &= n^2 + 4n + 4; \\n^2 - 2n - 3 &= 0; \\n_1 &= 3, \quad n_2 = -1.\end{aligned}$$

Число -1 не удовлетворяет условию задачи, так как длина стороны не может выражаться отрицательным числом.

Если $n = 3$, то $n + 1 = 4$, $n + 2 = 5$. Таким образом, единственный прямоугольный треугольник с длинами сторон, выражающимися последовательными натуральными числами, — это египетский треугольник.

Пример 3. Сигнальная ракета выпущена под углом 45° к горизонту с начальной скоростью 30 м/с (рис. 3.3). В этом случае высота, на которой находится ракета в определённый момент времени, может быть приближённо вычислена по формуле $h = 2 + 21t - 5t^2$. Через сколько секунд ракета окажется на высоте 10 м?

Решение. Решим уравнение

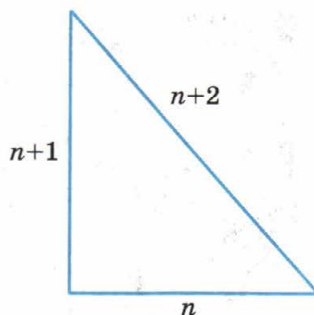
$$\begin{aligned}10 &= 2 + 21t - 5t^2; \\5t^2 - 21t + 8 &= 0; \\D &= 441 - 160 = 281; \\t &= \frac{21 \pm \sqrt{281}}{10}; \\t_1 &\approx 0,4, \quad t_2 \approx 3,8.\end{aligned}$$

Оба полученных корня уравнения являются решениями задачи. Ракета окажется на высоте 10 м дважды: первый раз при подъёме, и это произойдёт через $0,4$ с, а второй раз при спуске, через $3,8$ с после запуска.

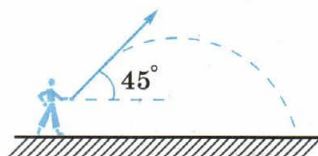
■ Расскажите, как составлена математическая модель ситуации, описанной в задаче примера 1. Какой из полученных корней уравнения не удовлетворяет условию задачи и почему?

■ Прочитайте задачу: «Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 29 см, а один его катет больше другого на 1 см. Найдите катеты треугольника». Решите задачу по плану:

- 1) Введите неизвестное и составьте уравнение, используя теорему Пифагора.
- 2) Упростите составленное уравнение и решите его.
- 3) Исследуйте полученные решения, сделайте вывод и запишите ответ.



■ Рис. 3.2



■ Рис. 3.3

A

- 465** а) Найдите два последовательных целых числа, произведение которых равно 210.
 б) Найдите два последовательных натуральных нечётных числа, произведение которых равно 323.
- 466** а) Сумма квадратов двух последовательных отрицательных целых чисел равна 85. Найдите эти числа.
 б) Сумма квадратов двух последовательных натуральных нечётных чисел равна 130. Найдите эти числа.
 в) Сумма квадратов двух последовательных целых чисел равна 41. Найдите эти числа.
- 467** а) Одна из сторон стандартного листа бумаги для пишущих машинок на 9 см больше другой. Площадь листа равна 630 см^2 . Найдите размеры листа.
 б) Под аттракционы отвели площадку прямоугольной формы, одна из сторон которой на 4 м больше другой. Её площадь равна 165 м^2 . Найдите стороны площадки.
- Сделайте по условию задачи схематический рисунок и решите задачу (468—472).
- 468** Садовый участок прямоугольной формы площадью 600 м^2 обнесён забором, длина которого 100 м. Чему равны стороны участка? Чему равны стороны участка такой же площади, если длина забора вокруг него составляет 140 м?
- 469** Кусок стекла имеет форму квадрата. Когда от него отрезали полосу шириной 20 см, его площадь стала равна 3500 см^2 . Найдите первоначальные размеры куска стекла.
- 470** Один катет прямоугольного треугольника на 7 см больше другого, а периметр треугольника равен 30 см. Найдите все стороны треугольника.
- 471** Две дороги пересекаются под прямым углом. От перекрёстка одновременно отъехали два велосипедиста, один в южном направлении, а другой в восточном. Скорость второго была на 4 км/ч больше скорости первого. Через час расстояние между ними оказалось равным 20 км. Определите скорость каждого велосипедиста.



472 Число диагоналей выпуклого n -угольника равно $\frac{n(n-3)}{2}$. Суще-

ствует ли многоугольник, в котором 77 диагоналей? 25 диагоналей? Если существует, то укажите число его сторон.

473 Тысячи лет назад пифагорейцы исследовали фигурные числа, и в частности *треугольные числа*, которые изображаются в виде треугольников (рис. 3.4). Треугольное число с номером n равно $\frac{n(n+1)}{2}$. Есть

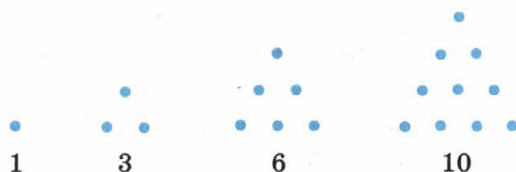


Рис. 3.4

ли среди треугольных чисел число 30? число 120? Если есть, укажите его номер.

474 Если тело падает вниз и начальная скорость падения равна v м/с, то расстояние, которое оно пролетит за t с, вычисляется приближённо по формуле $h = vt + 5t^2$. Используя эту формулу, решите задачу (ответ округлите до десятых):

а) Камень брошен с 80-метровой башни со скоростью 7 м/с. Через сколько секунд он упадёт на землю?

б) С самолёта, летящего на высоте 700 м, на льдину сброшен груз с начальной скоростью 30 м/с. Через сколько секунд груз достигнет льдины?

475 Если тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v м/с, то высота, на которой оно окажется через t с, может быть приближённо найдена по формуле $h = vt - 5t^2$. Используя эту формулу, решите задачу:

а) Футболист на тренировке подбрасывает ногой мяч вертикально вверх. Если он подбросил мяч, сообщив ему начальную скорость 15 м/с, то через сколько секунд мяч окажется в 10 м над землёй?

б) Футболист, подбрасывая мяч ногой, сообщил ему начальную скорость 20 м/с. Взойдёт ли мяч выше берёзы, высота которой 15 м? Взойдёт ли он выше дома, высота которого 22 м?

Б

476 Футболист на тренировке подбрасывает головой мяч вертикально вверх. Если он подбросит мяч, сообщив ему начальную скорость 10 м/с, то через сколько секунд мяч окажется в 6 м над землёй? (Рост футболиста считайте равным 200 см, ответ дайте приближённо с одним знаком после запятой.)

Сделайте по условию задачи схематический рисунок и решите задачу (477—480).

- 477** Из металлического листа, имеющего форму прямоугольника, длина которого в 1,5 раза больше ширины, сделан открытый сверху ящик. Для этого по углам листа вырезаны квадраты со стороной 3 дм и получившиеся боковые грани загнуты. Найдите размеры листа, если объём получившегося ящика оказался равным 216 дм^3 .
- 478** На участке прямоугольной формы со сторонами 7 м и 6 м хотят разместить прямоугольную клумбу площадью 12 м^2 так, чтобы ширина образовавшейся вокруг клумбы дорожки была везде одинаковой. Какую ширину должна иметь дорожка?
- 479** В парке имеется детский бассейн прямоугольной формы со сторонами 6 м и 9 м. Он окружён прогулочной дорожкой, ширина которой везде одинакова. Площадь дорожки равна площади бассейна. Найдите ширину дорожки.
- 480** Витрина магазина имеет размер $3 \times 4 \text{ м}$. При окраске здания на стекло по периметру витрины наклеили защитную бумажную ленту, чтобы не закрасить стекло. Лента закрыла площадь, равную половине площади витрины. Найдите ширину бумажной ленты.
- 481** Существует ли прямоугольный треугольник, стороны которого выражаются последовательными чётными числами? последовательными нечётными числами?
- 482** Сумму n последовательных натуральных чисел, начиная с 1, можно вычислить по формуле $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Определите, сколько натуральных чисел, начиная с 1, надо сложить, чтобы в сумме получилось 66. Какое наименьшее число последовательных натуральных чисел от 1 до n надо сложить, чтобы их сумма была больше 55?
- 483** К Новому году в семье Ивановых каждый приготовил подарок каждому из остальных членов семьи. Всего под ёлкой оказалось 30 подарков. Сколько человек в семье Ивановых?
- 484** На выпускном вечере каждый ученик класса подарил каждому из остальных свою фотографию. Когда все фотографии сложили на столе, их оказалось 272. Сколько учащихся в классе?

- 485** В турнире шахматистов каждый из участников сыграл с каждым по одной партии, всего было сыграно 120 партий. Сколько шахматистов участвовало в турнире?

- 486** На плоскости отмечено несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Все они попарно соединены отрезками. Сколько всего отмечено точек, если проведено 105 отрезков?



- 487** ■ **РАЗБИРАЕМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ** ■ Разберите, как по условию задачи составлено уравнение, и решите её.

Цена товара была дважды повышена на одно и то же число процентов. На сколько процентов повышалась цена товара каждый раз, если его первоначальная стоимость 200 р., а окончательная 338 р.?

Способ 1. Пусть цена товара каждый раз повышалась на x процентов, т. е. на $\frac{x}{100}$ величины. Тогда $\left(200 + 200 \cdot \frac{x}{100}\right)$ р. — цена то-

вара после первого повышения; $\left((200 + 2x) + (200 + 2x) \cdot \frac{x}{100}\right)$ р. —

цена товара после второго повышения.

Так как окончательная цена 338 р., то имеем равенство

$$(200 + 2x) + (200 + 2x) \cdot \frac{x}{100} = 338.$$

Способ 2. Пусть цена товара каждый раз увеличивалась в x раз. Тогда $(200 \cdot x) \cdot x$ р. — цена товара после второго повышения. Имеем уравнение $(200 \cdot x) \cdot x = 338$.

- 488** Цена товара была дважды снижена на одно и то же число процентов. На сколько процентов снижалась цена товара каждый раз, если его первоначальная стоимость 400 р., а окончательная 256 р.?

Совет. Используйте ход рассуждения, данный в задаче 487.

- 489** ■ **ИССЛЕДУЕМ** ■ Вам, вероятно, приходилось слышать о *золотом сечении*. Так называют число, выражающее определённое отношение длин отрезков. Золотое сечение широко использовалось в древней архитектуре. Сооружения, построенные

с использованием золотого сечения, поражают своей соразмерностью, законченностью, красотой.

Золотое сечение может быть описано следующим образом: точка делит отрезок на две части в отношении, равном золотому сечению, если отношение большей части к меньшей равно отношению длины всего отрезка к длине большей его части (рис. 3.5):

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

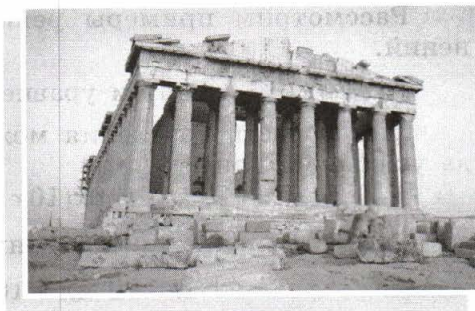


Рис. 3.5

1) Найдите число, выражающее золотое сечение. Для этого примите длину меньшей части b за 1 и, подставив $b = 1$ в пропорцию, найдите из этой пропорции a . Положительное значение a и будет равно золотому сечению. (Запишите его точное значение и приближённое значение с тремя знаками после запятой.)

2) Постройте какой-нибудь прямоугольник, отношение сторон которого равно золотому сечению. «Отрежьте» от него квадрат. Убедитесь в том, что отношение сторон полученного прямоугольника также равно золотому сечению (в вычислениях используйте точное значение золотого сечения).

3.5 Неполные квадратные уравнения

Любое квадратное уравнение можно решить, воспользовавшись формулой корней. Однако в ряде случаев корни квадратного уравнения удаётся найти с помощью более простых приёмов. Такими приёмами прежде всего следует пользоваться при решении *неполных квадратных уравнений*.

Определение

Квадратное уравнение называется **неполным**, если хотя бы один из коэффициентов b и c равен нулю.

Например, $25x^2 - 4x = 0$, $7x^2 - 1 = 0$, $0,6x^2 = 0$ — неполные квадратные уравнения.

2 Рассмотрим примеры решения неполных квадратных уравнений.

Пример 1. Решим уравнение $10x^2 + 9x = 0$.

Левую часть уравнения можно разложить на множители. Тогда уравнение примет вид

$$x(10x + 9) = 0.$$

Равенство нулю произведения $x(10x + 9)$ означает, что

$$x = 0 \text{ или } 10x + 9 = 0, \text{ т. е.}$$

$$x = 0 \text{ или } x = -0,9.$$

Таким образом, уравнение $10x^2 + 9x = 0$ имеет два корня: $x_1 = 0$, $x_2 = -0,9$.

Неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$, решают путём разложения его левой части на множители. Оно всегда имеет два корня, причём один из корней равен нулю.

Пример 2. Решим уравнение $64x^2 - 49 = 0$.

Перенесём свободный член уравнения в правую часть. Получим

$$64x^2 = 49.$$

Отсюда

$$x^2 = \frac{49}{64},$$

$$x = \sqrt{\frac{49}{64}} \text{ или } x = -\sqrt{\frac{49}{64}},$$

$$x = \frac{7}{8} \text{ или } x = -\frac{7}{8}.$$

Таким образом, уравнение имеет два противоположных корня: $x_1 = \frac{7}{8}$, $x_2 = -\frac{7}{8}$.

Пример 3. Решим уравнение $16x^2 + 1 = 0$.

Если выполнить те же преобразования, что и в предыдущем примере, то получим

$$x^2 = -\frac{1}{16}.$$

Но квадратный корень из отрицательного числа извлечь нельзя, поэтому уравнение корней не имеет.

Заметим, что прийти к выводу об отсутствии корней уравнения можно и без преобразований. В самом деле, выражение $16x^2$ при любом x неотрицательно (положительно или равно нулю), значит, сумма $16x^2 + 1$ всегда положительна, т. е. в нуль она никогда не обращается.

Неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$, либо не имеет корней, либо имеет два корня, которые являются противоположными числами.

- Какое квадратное уравнение называется неполным (фрагмент 1)? Запишите квадратное уравнение, имеющее коэффициенты: а) $a = 2$, $b = -5$, $c = 0$; б) $a = -1$, $b = 0$, $c = \frac{1}{9}$. Какой из коэффициентов уравнений $2x^2 - 5x = 0$ и $-x^2 + 9 = 0$ равен 0?
- Расскажите, как решают квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$. Сколько корней оно имеет? Воспользовавшись примером 1 как образцом, решите уравнение $7x^2 - 28x = 0$.
- Решите уравнения $9x^2 - 1 = 0$ и $x^2 + 9 = 0$, воспользовавшись в качестве образцов примерами 2 и 3. Сколько корней может иметь квадратное уравнение вида $ax^2 + c = 0$?

A

Решите уравнение (490—493).

- 490** а) $x^2 - 5x = 0$; в) $2z - 3z^2 = 0$; д) $-x - x^2 = 0$;
 б) $y^2 + 3y = 0$; г) $5x + 2x^2 = 0$; е) $-2x^2 - 4x = 0$.
- 491** а) $4y^2 = y$; в) $3z - z^2 = 3z^2$; д) $2y - y^2 = 4y - 5y^2$;
 б) $6x^2 = -x$; г) $x^2 + 1 = x + 1$; е) $z = 7z^2 - 6z$.
- 492** а) $x^2 - 16 = 0$; в) $y^2 + 100 = 0$; д) $16 - 4x^2 = 0$;
 б) $z^2 - 25 = 0$; г) $3z^2 - 27 = 0$; е) $1 - 9z^2 = 0$.
- 493** а) $2y^2 - 16 = 0$; в) $24 = 2z^2$; д) $2x^2 - 1 = 0$;
 б) $3x^2 = 18$; г) $7x^2 + 49 = 0$; е) $5 = 15x^2$.

494 Установите соответствие между уравнениями и утверждениями об их корнях:

- | | |
|----------------|------------------------------------|
| 1) $x^2 = 2$ | а) не имеет корней; |
| 2) $x^2 = 25$ | б) имеет два рациональных корня; |
| 3) $x^2 = -81$ | в) имеет два иррациональных корня. |

Решите уравнение (495—496).

- 495** а) $(x + 4)(x + 5) = 20$; д) $(x + 2)^2 = 4(x + 4)$;
 б) $(x + 5)(x - 5) = 24$; е) $4(x - 1)^2 = (x + 2)^2$;
 в) $5(7 - 2x) = 2x(x - 5)$; ж) $(3x - 1)^2 = 3(1 - 2x)$;
 г) $x(3x - 4) = 2(5 - 2x)$; з) $(x + 3)^2 = 3(x + 1)^2$.

496 а) $0,02x^2 + 0,005x = 0$; г) $-0,001 = -0,004x^2$;

б) $\frac{x^2}{3} = \frac{x}{6}$;

д) $\frac{x-1}{5} = \frac{x^2-5}{25}$;

в) $\frac{1}{100} = \frac{x^2}{10}$;

е) $\frac{x^2}{3} = \frac{1}{27}$.

Подсказка. Преобразуйте уравнение в уравнение с целыми коэффициентами.

497 Найдите корни уравнения:

а) $x^3 - x = 0$;

в) $9x^3 - x = 0$;

д) $-10x^2 + 2x^3 = 0$;

б) $x^3 + 4x^2 = 0$;

г) $2x^2 + 4x^3 = 0$;

е) $2x + 18x^3 = 0$.

Решите задачу (498—502).

498 а) Произведение двух последовательных натуральных чисел больше меньшего из этих чисел на 25. Найдите эти числа.

б) Произведение двух последовательных натуральных чисел больше большего из этих чисел на 48. Найдите эти числа.

499 а) Катеты прямоугольного треугольника относятся как 3 : 4, а его гипотенуза равна 1 дм. Найдите периметр треугольника.

б) Отношение гипотенузы прямоугольного треугольника к одному из катетов равно $\frac{17}{8}$, а другой катет равен 30 см. Найдите площадь треугольника.

500 На перекрёстке двух дорог встретились пешеход и велосипедист, а затем каждый продолжил свой путь: велосипедист — на север со скоростью 12 км/ч, а пешеход — на восток со скоростью 5 км/ч. Через какое время после их встречи пешеход и велосипедист окажутся на расстоянии 26 км друг от друга?

501 Секция паркета, площадь которого равна 400 см^2 , состоит из шести прямоугольных пластин одинаковой ширины (рис. 3.6). Стороны большой пластины относятся как 1 : 3. Определите размеры большой и малой пластин.

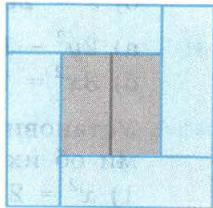


Рис. 3.6

502 При решении следующих задач воспользуйтесь формулой из задачи 475.

а) Мяч отскочил от пола вертикально вверх с начальной скоростью 10 м/с. Через сколько секунд он снова коснётся пола?

б) Мальчик бросил мяч вертикально вверх с начальной скоростью 12 м/с. Через сколько секунд он поймал мяч?

Б

Решите уравнение (503—505).

503 а) $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(x+1)^2}{2} = 2$; в) $(x-2)^2 - \frac{(x-3)^2}{3} = 1$;

б) $\frac{(x-3)^2}{3} + 3 = \frac{(x-2)^2}{2}$; г) $\frac{(x+4)^2}{2} - \frac{1}{3} = (x+2)^2$.

504 а) $(2x+1)^2 = 2x+1$; в) $(3x-1)^2 = 2(3x-1)$;

б) $(y-2)^2 - 4 = 0$; г) $9 - (2x-3)^2 = 0$.

505 а) $(x^2-1)^3 + 2(x^2-1)^2 = 0$; в) $x^2(x^2-3)^2 - 4(x^2-3) = 0$;

б) $x^2(x-1) - 3x(x-1) = 0$; г) $x^2(x-5)^2 - 5(x-5)^2 = 0$.

506 Составьте неполное квадратное уравнение, имеющее корни:

а) 0 и 3; б) $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$; в) -8 и 8; г) 0 и $\sqrt{2}$.

507 Решите неполное квадратное уравнение:

а) $ax^2 + ax = 0$; б) $ax^2 - x = 0$.

■ АНАЛИЗИРУЕМ (508—509) ■

508 Имеет ли решение неполное квадратное уравнение $ax^2 + c = 0$, если:

а) $a > 0, c > 0$; в) $a < 0, c > 0$;

б) $a > 0, c < 0$; г) $a < 0, c < 0$?

509 Один из корней неполного квадратного уравнения $ax^2 + bx = 0$ равен 0. Определите знак другого корня, если:

а) $a > 0, b > 0$; в) $a < 0, b > 0$;

б) $a > 0, b < 0$; г) $a < 0, b < 0$.

Каждый случай проиллюстрируйте конкретным примером.

510 **■ РАЗБИРАЕМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ■** При решении задачи из п. 3.4 было составлено уравнение $(39-2x)(24-2x) = 700$, которое при решении свелось к полному квадратному уравнению с большими коэффициентами. Однако его можно свести и к неполному квадратному уравнению с помощью замены $y = 4 - 2x$. Действительно, эта замена приведёт к тому, что «уничтожится» число 700 — правая часть уравнения:

$$\begin{aligned}(39-2x)(24-2x) &= (35 + (4-2x))(20 + (4-2x)) = \\ &= (35+y)(20+y).\end{aligned}$$

Получаем

$$(y+35)(y+20) = 700,$$

$$y^2 + 55y + 700 = 700,$$

$$y^2 + 55y = 0.$$

Решите уравнение, используя замену, приводящую к неполному квадратному уравнению:

а) $(9 - 3x)(46 - 3x) = 120$; б) $(5x - 63)(5x - 18) = 550$.

Решите задачу (511—512).

511 а) Сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел на 19 больше удвоенного меньшего из них. Найдите эти числа.

б) Сумма квадратов двух последовательных положительных чётных чисел на 72 больше удвоенной суммы этих чисел. Найдите эти числа.

512 Площадь кольца равна 36 см^2 . Найдите радиусы внутреннего и внешнего кругов, образующих кольцо, если известно, что первый в 2 раза меньше второго (примите $\pi \approx 3$).

3.6 Теорема Виета

Между корнями приведённого квадратного уравнения и его коэффициентами существует интересная связь. Её легко обнаружить с помощью конкретных примеров.

Рассмотрите таблицу, в которой для нескольких приведённых квадратных уравнений указаны корни и вычислены их суммы и произведения:

Уравнение	Корни	Сумма корней	Произведение корней
$x^2 - 5x + 6 = 0$	2 и 3	5	6
$x^2 + 7x + 12 = 0$	-3 и -4	-7	12
$x^2 - 4x - 5 = 0$	-1 и 5	4	-5

Если вы сравните сумму и произведение корней каждого уравнения с его коэффициентами, то обнаружите, что в каждом случае сумма корней противоположна коэффициенту при x , а их произведение равно свободному члену. Этим свойством обладает любое приведённое квадратное уравнение, имеющее корни. Справедливо следующее утверждение:

Сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Сформулированное утверждение называется *теоремой Виета* — по имени выдающегося французского математика Франсуа Виета (XVI в.), хотя о связи между корнями и коэффициентами квадратного уравнения знали уже математики Древнего Вавилона и Древнего Египта.

Доказательство. Приведённое квадратное уравнение имеет вид $x^2 + bx + c = 0$, но исторически его принято записывать так: $x^2 + px + q = 0$.

Пусть это уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} \text{ и } x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}, \text{ где } D = p^2 - 4q.$$

Найдём их сумму и произведение:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} + \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{-p + \sqrt{D} - p - \sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p;$$

$$x_1 x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{(-p)^2 - (\sqrt{D})^2}{4} = \frac{p^2 - D}{4} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = \frac{4q}{4} = q.$$

Таким образом, теорема доказана.

Равенства

$$x_1 + x_2 = -p \text{ и } x_1 x_2 = q,$$

выражающие связь между корнями и коэффициентами квадратного уравнения, называют *формулами Виета*.

Используя теорему Виета, легко вывести соответствующие формулы и для квадратного уравнения, не являющегося приведённым. В самом деле, пусть квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_1 и x_2 . Разделив обе его части на a , получим приведённое уравнение

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

имеющее те же корни.

Тогда по теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Формулы Виета позволяют, не решая уравнение, получить некоторую информацию о его корнях.

Возьмём, например, уравнение $2x^2 - 5x - 4 = 0$. Его дискриминант положителен, т. е. это уравнение имеет корни. По теореме Виета найдём сумму и произведение корней этого уравнения:

$$x_1 + x_2 = \frac{5}{2} = 2,5; \quad x_1 x_2 = -\frac{4}{2} = -2.$$

Из этих равенств ясно, что корни данного уравнения имеют разные знаки и у положительного корня модуль больше.

Рассуждая таким образом, важно не ошибиться. Так, к квадратному уравнению $2x^2 - 5x + 4 = 0$ подобные рассуждения неприменимы. Дело в том, что у этого уравнения отрицательный дискриминант ($D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -7$) и корней оно не имеет.

2 Соотношения между корнями и коэффициентами квадратного уравнения позволяют в некоторых случаях находить его корни устно, не прибегая к формуле корней.

Попробуем, например, подобрать корни квадратного уравнения $x^2 - 8x + 15 = 0$. Формулы Виета подсказывают решение: корнями должны быть числа, сумма которых равна 8 и произведение которых равно 15. Легко видеть, что этим условиям отвечают числа 5 и 3: $5 + 3 = 8$ и $5 \cdot 3 = 15$. Подставив числа 5 и 3 в уравнение, убедимся, что они действительно являются его корнями: $5^2 - 8 \cdot 5 + 15 = 0$ и $3^2 - 8 \cdot 3 + 15 = 0$.

Решение квадратного уравнения путём подбора его корней основано на следующей теореме:

Если числа m и n таковы, что $m + n = -p$, а $mn = q$, то эти числа являются корнями уравнения

$$x^2 + px + q = 0.$$

Это теорема, обратная теореме Виета. Чтобы доказать её, выразим коэффициенты уравнения $x^2 + px + q = 0$ через m и n : $p = -(m + n)$ и $q = mn$. Значит, уравнение можно записать в таком виде:

$$x^2 - (m + n)x + mn = 0.$$

Подставим в уравнение вместо x поочерёдно числа m и n :

$$m^2 - (m + n)m + mn = m^2 - m^2 - mn + mn = 0,$$

$$n^2 - (m + n)n + mn = n^2 - mn - n^2 + mn = 0.$$

Таким образом, эти числа — корни уравнения.

□ Сформулируйте теорему Виета и запишите формулы, выражающие связь между корнями и коэффициентами приведённого квадратного уравнения (фрагмент 1).

Проверьте, что уравнение $x^2 + 16x + 63 = 0$ имеет корни, и назовите их сумму и произведение.

- Как, используя формулы Виета, найти сумму и произведение корней не-приведённого квадратного уравнения? Запишите соответствующие формулы (фрагмент 1). Убедитесь, что уравнение $2x^2 - 7x + 3 = 0$ имеет корни, и найдите их сумму и произведение.
- Сформулируйте теорему, обратную теореме Виета (фрагмент 2). Найдите подбором корни уравнения $x^2 + 2x - 15 = 0$.

А

513 Не решая уравнения, укажите, имеет ли оно корни и чему равны произведение и сумма его корней:

- а) $x^2 - 14x + 40 = 0$; г) $2x^2 - 5x - 3 = 0$;
 б) $x^2 + 16x + 15 = 0$; д) $4x^2 + 16x + 15 = 0$;
 в) $x^2 - 2x - 1 = 0$; е) $3x^2 + 11x - 4 = 0$.

■ АНАЛИЗИРУЕМ (514—515) ■

514 Все данные уравнения имеют корни. В каждом случае объясните, почему уравнение имеет корни одинаковых знаков, и определите знаки корней:

- а) $x^2 + 3x + 2 = 0$; в) $x^2 - 5x + 4 = 0$; д) $x^2 - 6x + 8 = 0$;
 б) $x^2 - 3x + 2 = 0$; г) $x^2 + 5x + 4 = 0$; е) $x^2 + 8x + 7 = 0$.

515 Все данные уравнения имеют корни. В каждом случае объясните, почему уравнение имеет корни разных знаков. Определите, какой из корней больше по модулю — положительный или отрицательный:

- а) $x^2 + 5x - 6 = 0$; в) $x^2 + 4x - 21 = 0$; д) $x^2 - 2x - 3 = 0$;
 б) $x^2 - 5x - 6 = 0$; г) $x^2 - 4x - 21 = 0$; е) $x^2 + 2x - 3 = 0$.

516 Не применяя формулу корней, найдите второй корень уравнения, если известен первый:

- а) $x^2 - 7x + 10 = 0$, $x_1 = 2$; в) $x^2 + 3x - 18 = 0$, $x_1 = 3$;
 б) $x^2 + 8x + 15 = 0$, $x_1 = -3$; г) $x^2 - 6x - 7 = 0$, $x_1 = 7$.

■ РАССУЖДАЕМ ■ Решите квадратное уравнение подбором корней (517—519).

- 517** а) $y^2 + 9y + 20 = 0$; д) $x^2 + 13x + 30 = 0$;
 б) $x^2 - 11x + 24 = 0$; е) $y^2 - 17y + 30 = 0$;
 в) $t^2 - 9t + 8 = 0$; ж) $t^2 + 12t + 32 = 0$;
 г) $z^2 + 12z + 20 = 0$; з) $u^2 - 15u + 50 = 0$.

518 а) $x^2 - 3x - 10 = 0$; д) $x^2 + 5x - 14 = 0$;

б) $u^2 - 4u - 5 = 0$; е) $t^2 - t - 42 = 0$;

в) $v^2 + 7v - 60 = 0$; ж) $y^2 + 5y - 50 = 0$;

г) $y^2 + y - 56 = 0$; з) $z^2 + z - 20 = 0$.

519 а) $z^2 - 11z + 18 = 0$; д) $u^2 + 14u + 24 = 0$;

б) $x^2 + 5x - 6 = 0$; е) $z^2 - 2z - 3 = 0$;

в) $y^2 - 14y + 33 = 0$; ж) $x^2 + 13x + 12 = 0$;

г) $t^2 + 7t - 18 = 0$; з) $y^2 - 4y - 21 = 0$.

520 ■ РАЗБИРАЕМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ■ Для составления квадратного уравнения, имеющего корни 8 и 7, можно применить два способа:

1) составить произведение $(x - 8)(x - 7) = 0$, откуда получаем уравнение $x^2 - 15x + 56 = 0$;

2) использовать формулы Виета: $x^2 - (8 + 7)x + 8 \cdot 7 = 0$, откуда получаем то же уравнение $x^2 - 15x + 56 = 0$.

Составьте двумя способами квадратное уравнение, имеющее корни:

а) 11 и 4; б) -4 и -5; в) -10 и 2; г) -1 и 15.

Б

521 ■ АНАЛИЗИРУЕМ ■ Определите, имеет ли уравнение корни. Если имеет, то ответьте на следующие вопросы: 1) Сколько корней имеет уравнение? 2) Рациональными или иррациональными являются его корни? 3) Каковы знаки корней? 4) Если корни разных знаков, то какой из них имеет больший модуль?

а) $3x^2 + 7x + 2 = 0$; д) $5x^2 - 3x + 1 = 0$;

б) $3y^2 - 8y + 2 = 0$; е) $-6z^2 + 11z - 3 = 0$;

в) $4x^2 - 11x - 3 = 0$; ж) $-2y^2 + 4y - 3 = 0$;

г) $-8z^2 - 2z + 3 = 0$; з) $2x^2 - 10x - 5 = 0$.

522 ■ РАЗБИРАЕМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ■ Уравнение $(3x - 7)(3x + 1) = 9$ с помощью замены $y = 3x - 7$ сводится к уравнению, которое легко решается устно с использованием формул Виета:

$$(3x - 7)((3x - 7) + 8) = y((3x - 7) + 8) = y(y + 8).$$

Получаем уравнение $y(y + 8) = 9$. Отсюда $y^2 + 8y - 9 = 0$.

Воспользовавшись этим приёмом, решите уравнение:

а) $(12 - 3x)(18 - 3x) = -5$; б) $(2x + 6)(5 - 2x) = 10$.

523 а) Один из корней уравнения $x^2 + px - 20 = 0$ равен -5 . Определите другой корень и коэффициент p .

б) Один из корней уравнения $3x^2 + px + 4 = 0$ равен -2 . Определите другой корень и коэффициент p .

524 а) Один из корней уравнения $x^2 - 8x + q = 0$ равен -10 . Определите другой корень и коэффициент q .

б) Один из корней уравнения $2x^2 + 3x + q = 0$ равен 3 . Определите другой корень и коэффициент q .

525 ■ **РАЗБИРАЕМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ** ■ Найдём все целые значения p , при которых уравнение $x^2 + px + 15 = 0$ имеет целые корни.

Решение. Найдём все пары целых чисел, произведение которых равно 15 :

$$15 = 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5 = (-1) \cdot (-15) = (-3) \cdot (-5).$$

Соответствующие значения p равны $-16, -8; 16, 8$.

Найдите все целые значения p , при которых данное уравнение имеет целые корни:

а) $x^2 + px + 15 = 0$; д) $x^2 + px + 10 = 0$;

б) $x^2 + px - 15 = 0$; е) $x^2 + px - 8 = 0$;

в) $x^2 + px + 12 = 0$; ж) $x^2 + px + 3 = 0$;

г) $x^2 + px - 12 = 0$; з) $x^2 + px - 32 = 0$.

526 Найдите все целые положительные значения q , при которых данное уравнение имеет целые корни:

а) $x^2 + 5x + q = 0$; б) $x^2 - 6x + q = 0$.

Найдите несколько целых отрицательных значений q , при которых указанные уравнения имеют целые корни. Можно ли перечислить все такие значения q ?

527 Составьте квадратное уравнение, корни которого:

а) на 2 меньше корней уравнения $x^2 - 187x + 148 = 0$;

б) на 3 больше корней уравнения $x^2 + 191x - 1250 = 0$.

Образец. а) Пусть y_1 и y_2 — корни уравнения, которое надо составить. Тогда

$$y_1 = x_1 - 2, \quad y_2 = x_2 - 2;$$

$$y_1 + y_2 = (x_1 + x_2) - 4,$$

$$y_1 \cdot y_2 = (x_1 - 2)(x_2 - 2) = x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4.$$

Доведите решение до конца.

ИЩЕМ СПОСОБ РЕШЕНИЯ (528–529)

528 Составьте квадратное уравнение, если известно, что:

а) $x_1x_2 = 12$, $x_1^2 + x_2^2 = 40$; б) $x_1x_2 = -3$, $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

Указание. Найдите сумму корней уравнения, воспользовавшись формулой квадрата суммы двух чисел.

529 Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2 . Выразите через коэффициенты p и q :

а) $x_1^2 + x_2^2$; б) $x_1^3 + x_2^3$; в) $x_1^4 + x_2^4$.

530 ИССЛЕДУЕМ

1) Докажите, что если сумма коэффициентов квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна нулю, то одним из корней этого уравнения является число 1.

2) Составьте какое-нибудь квадратное уравнение, имеющее корень, равный 1, и найдите второй корень этого уравнения.

3) Найдите устно корни уравнения:

а) $x^2 - 1999x + 1998 = 0$; в) $8x^2 - 5x - 3 = 0$;

б) $x^2 + 2000x - 2001 = 0$; г) $100x^2 - 150x + 50 = 0$.

3.7 Разложение квадратного трёхчлена на множители

1 Многочлен вида $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, называют *квадратным трёхчленом*. Так, например, многочлены $10x^2 - 3x + 6$ и $-x^2 + \sqrt{2}x - 12$ являются квадратными трёхчленами. Заметим, что квадратный трёхчлен необязательно должен состоять из трёх слагаемых. Такой многочлен, как, например, $10x^2 - 25$, тоже является квадратным трёхчленом — просто его второй коэффициент равен 0.

Обратите внимание: в левой части квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ записан квадратный трёхчлен. Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ называют также *корнями квадратного трёхчлена* $ax^2 + bx + c$. Иными словами, корни квадратного трёхчлена — это значения переменной, при которых квадратный трёхчлен обращается в нуль. Понятно, что квадратный трёхчлен, как и квадратное уравнение, может иметь два корня, один корень или не иметь корней. И зависит это от выражения $D = b^2 - 4ac$, которое называют также *дискриминантом квадратного трёхчлена*.

2 Квадратный трёхчлен, имеющий корни, можно разложить на множители.

Возьмем трёхчлен $x^2 - 5x + 6$. Чтобы разложить его на множители, применим способ группировки, причём формулы Виета подскажут нам, какую группировку использовать. Корни этого трёхчлена — числа 2 и 3. Выразив коэффициенты трёхчлена через корни, получим

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 &= x^2 - (2 + 3)x + 2 \cdot 3 = x^2 - 2x - 3x + 2 \cdot 3 = \\ &= x(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x - 3). \end{aligned}$$

Разложим теперь на множители трёхчлен $2x^2 - 10x + 12$. Понятно, что он имеет те же корни, что и трёхчлен $x^2 - 5x + 6$ (объясните почему). Сначала вынесем за скобки коэффициент при x^2 , получим

$$2x^2 - 10x + 12 = 2(x^2 - 5x + 6) = 2(x - 2)(x - 3).$$

Точно так же обстоит дело и в общем случае:

Если x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Проще всего провести доказательство так: выполнить умножение в правой части этого равенства и убедиться в том, что при этом получается левая часть. Будем иметь

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) = \\ &= a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = ax^2 + bx + c. \end{aligned}$$

В ходе доказательства, воспользовавшись теоремой Виета, мы выполнили подстановку:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ и } x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Итак, если квадратный трёхчлен имеет корни, то он раскладывается на множители. Верно и обратное утверждение: если квадратный трёхчлен раскладывается на линейные множители, то он имеет корни. В самом деле, если $ax^2 + bx + c = (kx + l)(mx + n)$, то, например, число $-\frac{n}{m}$ — корень трёхчлена $ax^2 + bx + c$.

Это обратное утверждение можно сформулировать по-другому:

Если квадратный трёхчлен не имеет корней, то его нельзя разложить на линейные множители.

Приведём примеры разложения квадратного трёхчлена на множители с использованием доказанной формулы.

Пример 1. Разложим на множители трёхчлен $-3x^2 - 5x + 2$.

Решив уравнение $-3x^2 - 5x + 2 = 0$, найдём, что корни трёхчлена — числа $\frac{1}{3}$ и -2 . Воспользовавшись формулой

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

получим

$$-3x^2 - 5x + 2 = (-3) \left(x - \frac{1}{3} \right) (x + 2).$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ a & & a & (x - x_1) & (x - x_2) & & \end{array}$$

Разложение на множители будет более красивым, если перемножить число -3 и двучлен $x - \frac{1}{3}$. Тогда трёхчлен $-3x^2 - 5x + 2$ будет записан в виде произведения двух линейных двучленов:

$$-3x^2 - 5x + 2 = (1 - 3x)(x + 2).$$

Формула разложения квадратного трёхчлена на множители справедлива и в том случае, если его дискриминант равен 0. При этом говорят, что трёхчлен имеет *два равных корня*.

Пример 2. Разложим на множители трёхчлен

$$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}.$$

Решив уравнение $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = 0$, найдём, что $x_1 = x_2 = \frac{2}{3}$. Таким образом,

$$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = \left(x - \frac{2}{3} \right) \left(x - \frac{2}{3} \right) = \left(x - \frac{2}{3} \right)^2.$$

Конечно, трёхчлен $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$ можно было бы «свернуть» в квадрат двучлена известным способом — воспользовавшись формулой $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

Таким образом, если дан квадратный трёхчлен, то, вычислив его дискриминант, вы можете выяснить, раскладывается ли этот трёхчлен на линейные множители или нет. А для разложения трёхчлена на множители вы теперь можете пользоваться простым способом, не требующим какой-либо догадки, как это было при использовании способа группировки.

- Какой многочлен называют квадратным трёхчленом (фрагмент 1)? Назовите коэффициенты квадратного трёхчлена: а) $x^2 - 15x + 50$; б) $0,4x^2 - 1,6$; в) $\frac{1}{3}x^2 + 2x$.

- Что называют корнем квадратного трёхчлена? Сколько корней может иметь квадратный трёхчлен и от чего зависит их наличие и количество? Как находят корни квадратного трёхчлена? Имеет ли корни квадратный трёхчлен $x^2 + 11x + 24$? Если имеет, найдите их.
- Всегда ли квадратный трёхчлен можно разложить на линейные множители? Сформулируйте соответствующее утверждение (фрагмент 2). Какой из трёхчленов $x^2 + 4x + 5$ и $x^2 + 4x - 5$ можно разложить на линейные множители, а какой — нельзя?
- Запишите формулу разложения квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ на множители. Запишите формулу разложения на множители для квадратного трёхчлена вида $x^2 + px + q$. Разложите на множители трёхчлен $5x^2 + 3x - 2$.

A

531 Найдите корни квадратного трёхчлена:

- а) $x^2 - 15x + 50$; в) $3x^2 - 2x - 1$;
 б) $2x^2 + 9x + 4$; г) $x^2 + 14x + 48$.

532 Определите, можно ли разложить на линейные множители квадратный трёхчлен:

- а) $x^2 - 12x - 4$; в) $2x^2 + 3x + 1$;
 б) $3x^2 + 8x + 10$; г) $x^2 - 5x + 8$.

Разложите на множители (533—535).

- 533** а) $m^2 + 3m - 18$; г) $a^2 + a - 6$;
 б) $b^2 + 9b + 8$; д) $n^2 - 4n - 60$;
 в) $d^2 + 11d + 18$; е) $x^2 - 23x + 60$.

- 534** а) $21 + 10n + n^2$; в) $42 - 13b + b^2$;
 б) $14 - 9k + k^2$; г) $48 - 14c + c^2$.

- 535** а) $2x^2 + 3x + 1$; в) $-4z^2 + 11z + 3$; д) $3 - 11m + 6m^2$;
 б) $3y^2 + 7y - 6$; г) $3a^2 + 7a + 2$; е) $2 + 9n + 7n^2$.

536 ■ ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО ■ В каком случае верно представлено разложение квадратного трёхчлена $3x^2 - 4x - 4$ на линейные множители?

- 1) $\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 2)$ 3) $3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 2)$
 2) $\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 2)$ 4) $3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x - 2)$

537 Покажите, что квадратные трёхчлены $x^2 + 2x - 3$, $2x^2 + 4x - 6$, $-5x^2 - 10x + 15$ имеют одни и те же корни. Разложите эти квадратные трёхчлены на множители.

538 Сократите дробь:

а) $\frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 + 5x}$; в) $\frac{y^2 - 7y + 12}{2y^2 - 8y}$; д) $\frac{m^2 - 2m - 8}{m^2 + 4m + 4}$;

б) $\frac{a^2 - 9}{a^2 + 8a + 15}$; г) $\frac{b^2 - 25}{b^2 - 8b + 15}$; е) $\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 5n + 4}$.

539 Разложите на множители:

а) $x^3 + 3x^2 + 2x$; в) $x^3 - 12x^2 + 32x$;

б) $x^3 - 7x^2 + 10x$; г) $x^4 + x^3 - 6x^2$.

540 Составьте какое-нибудь уравнение, имеющее корни:

а) 2; -8; в) 0; 10; 12; д) 1; 2; -3;

б) 0; -1; 5; г) 1; 2; -2; е) 0; 1; 2; 3.

Б

541 Представьте в виде произведения двух линейных множителей с целыми коэффициентами:

а) $6x^2 + 25x + 14$; г) $8m^2 - 27m - 20$;

б) $18y^2 - 19y - 12$; д) $-6a^2 + a + 12$;

в) $-12z^2 - 11z + 15$; е) $24b^2 + 5b - 36$.

■ РАССУЖДАЕМ (542–543) ■

542 Найдите все целые значения m , при которых квадратный трёхчлен можно разложить на линейные двучлены с целыми коэффициентами:

а) $c^2 + mc + 10$; в) $x^2 + mx - 21$;

б) $z^2 + mz + 3$; г) $y^2 + my - 12$.

543 Найдите значение k , при котором:

а) разложение на множители трёхчлена $2x^2 + 5x + k$ содержит множитель $(x + 3)$;

б) разложение на множители трёхчлена $3x^2 - 8x + k$ содержит множитель $(x - 2)$;

в) разложение на множители трёхчлена $-4x^2 + kx + 1$ содержит множитель $(x - 1)$;

г) разложение на множители трёхчлена $2x^2 - 5x + k$ содержит множитель $(2x + 3)$;

д) разложение на множители трёхчлена $4x^2 - 8x + k$ содержит множитель $(2x - 1)$.

544 Сократите дробь:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \frac{x^3+1}{3x^2+2x-1}; & \text{в) } \frac{1-x^2}{5x^2-4x-1}; & \text{д) } \frac{5+3x-2x^2}{1-x-2x^2}; \\ \text{б) } \frac{x^3-1}{2x^2+x-3}; & \text{г) } \frac{2x^2-7x+3}{x-2x^2}; & \text{е) } \frac{3x^2-4x-4}{6-x-x^2}. \end{array}$$

■ АНАЛИЗИРУЕМ (545–548) ■ Разложите на множители:

545 а) $x^2(x-5) - x(x-5) - 42(x-5)$;
 б) $y^2(y+3) + 9y(y+3) + 20(y+3)$;
 в) $2v^2(1-v^2) - 5v(1-v^2) - 3(1-v^2)$;
 г) $3a^2(a^2-4) + 2a(a^2-4) - a^2+4$.

546 а) $x^4 - 5x^2 + 4$; в) $4x^4 - 32x^2$;
 б) $m^4 - 13m^2 + 36$; г) $3x^4 - 75$.

547 а) $(x+y)^2 - 3(x+y) - 10$; г) $(a-2)^2 + 4(a-2) - 21$;
 б) $(a+b)^2 - 5(a+b) - 84$; д) $(3-y)^2 - 2(3-y) - 35$;
 в) $(m+n)^2 + 3(m+n) + 2$; е) $(1-x)^2 - 6(1-x) + 8$.

548 а) $m^2 - 11mn + 28n^2$; г) $b^2 + 6bc - 55c^2$;
 б) $a^2 - 16ab - 36b^2$; д) $n^2 + 14an + 24a^2$;
 в) $x^2 + 21xy + 20y^2$; е) $a^2 - 9ac - 36c^2$.

Подсказка. а) Решите уравнение $m^2 - 11mn + 28n^2 = 0$ относительно m ; сделайте это устно, пользуясь формулами Виета.

3.8 Целые корни уравнения с целыми коэффициентами

(Для тех, кому интересно)

Вам уже приходилось находить корни квадратного уравнения без использования общей формулы корней, непосредственным подбором. Познакомимся ещё с одним приёмом бесформульного решения квадратного уравнения, с помощью которого можно отыскивать его целый корень (если, конечно, такой есть). При этом мы будем рассматривать только уравнения с целыми коэффициентами.

Возьмём уравнение $5x^2 - 14x - 3 = 0$. Предположим, что целое число m — корень этого уравнения, т. е. $5m^2 - 14m - 3 = 0$. Это равенство можно переписать так: $m(5m - 14) = 3$. Число, записанное слева, делится на m , поэтому и равное ему число 3 также делится на m . Мы пришли к выводу: если уравнение $5x^2 - 14x - 3 = 0$ имеет целый корень, то он является делителем свободного члена.

Теперь понятно, как этот целый корень можно отыскать: нужно выписать все делители свободного члена и затем подстановкой проверить, является ли какое-нибудь из этих чисел корнем уравнения.

Всего имеем четыре делителя: 1, -1, 3 и -3. Подставляя их в уравнение, получим

$$\begin{aligned} 5 \cdot 1^2 - 14 \cdot 1 - 3 &\neq 0, \\ 5 \cdot (-1)^2 - 14 \cdot (-1) - 3 &\neq 0, \\ 5 \cdot 3^2 - 14 \cdot 3 - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Итак, число $x_1 = 3$ — корень уравнения. А второй корень можно найти, воспользовавшись, например, соотношением $x_1 x_2 = -\frac{3}{5}$.

Подставив вместо x_1 число 3, получим

$$3x_2 = -\frac{3}{5}, \quad x_2 = -\frac{1}{5}.$$

У вас может возникнуть естественный вопрос: «Зачем нужен такой приём, когда любое квадратное уравнение можно решить по формуле корней?»

Оказывается, в некоторых случаях такой способ отыскания корней может быть очень полезен. Возьмём, например, уравнение $183x^2 - 184x + 1 = 0$. Если решать его по формуле, то придётся выполнять громоздкие вычисления. В то же время с помощью рассмотренного приёма легко обнаружить, что один из его корней равен 1. (Найдите самостоятельно второй корень.)

Существенным также является то, что этот приём носит общий характер. Его можно использовать для нахождения целых корней не только квадратных уравнений, но и уравнений более высоких степеней, например уравнений третьей степени (или кубических) $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, где $a \neq 0$; четвёртой степени $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, где $a \neq 0$. Для таких уравнений формулы корней хотя и существуют, но настолько сложны, что в явном виде их даже не выписывают. А уже для уравнения пятой степени формулы корней вообще не существуют.

Поэтому для решения уравнений третьей и четвёртой степени мы пользовались *специальными приёмами* — разложением на множители многочлена в левой части, понижением степени уравнения с помощью подстановки. А теперь ещё будем использовать приём

отыскания целого корня, который основан на следующем утверждении:

Всякий целый корень уравнения с целыми коэффициентами является делителем его свободного члена.

Пример 1. Найдём целые корни уравнения

$$2x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0.$$

Выпишем делители свободного члена: 1; -1; 2; -2. Подставим их в уравнение:

$$2 \cdot 1^3 + 1^2 - 5 \cdot 1 + 2 = 0,$$

$$2 \cdot 2^3 + 2^2 - 5 \cdot 2 + 2 \neq 0,$$

$$2 \cdot (-1)^3 + (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 2 \neq 0,$$

$$2 \cdot (-2)^3 + (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 2 = 0.$$

Таким образом, уравнение имеет два целых корня: 1 и -2.

Если найден какой-нибудь целый корень уравнения, то его левую часть можно разложить на множители, один из которых есть разность между переменной и этим корнем. А это часто даёт возможность найти и другие корни уравнения или установить, что их нет.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0.$$

Легко найти его целый корень, равный 1 (сделайте это самостоятельно). Разложим левую часть уравнения на множители, одним из которых будет разность $(x - 1)$. Для этого воспользуемся способом группировки.

Чтобы у нас появился одночлен, который можно будет объединить в группу со старшим членом $6x^3$, отнимем от левой части уравнения одночлен $6x^2$ и прибавим его:

$$\underbrace{6x^3 - 6x^2} + 6x^2 - 11x^2 + 6x - 1 = 0,$$

$$6x^2(x - 1) - 5x^2 + 6x - 1 = 0.$$

Теперь прибавим и вычтем $5x$:

$$6x^2(x - 1) - \underbrace{5x^2 + 5x} - 5x + 6x - 1 = 0,$$

$$6x^2(x - 1) - 5x(x - 1) + (x - 1) = 0.$$

Вынесем за скобку двучлен $(x - 1)$, тогда уравнение примет вид

$$(x - 1)(6x^2 - 5x + 1) = 0.$$

Теперь можно выяснить, имеет ли уравнение $6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0$ другие корни. Для этого достаточно решить квадратное уравнение $6x^2 - 5x + 1 = 0$. Получим $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$. Значит, уравнение $6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0$ имеет три корня: 1 , $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$.

549 Найдите корни квадратного уравнения, не пользуясь формулой корней:

а) $2x^2 - 3x + 1 = 0$; в) $3x^2 - 10x - 8 = 0$;

б) $4x^2 + 7x + 3 = 0$; г) $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

Указание. Сначала найдите целый корень уравнения.

550 Найдите целые корни уравнения, если они есть:

а) $30x^2 - 23x - 2 = 0$;

б) $x^3 + 5x^2 - 17x - 21 = 0$;

в) $2x^3 - 5x^2 - 22x - 15 = 0$;

г) $3x^4 - 2x^2 + 3 = 0$;

д) $x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12 = 0$.

551 Решите уравнение:

а) $x^4 + 2x^3 - x - 2 = 0$; в) $2x^3 - 7x^2 + 9 = 0$;

б) $x^3 - 12x^2 + 9x + 22 = 0$; г) $5x^3 - 54x^2 + 39x + 10 = 0$.

552 Разложите на множители многочлен:

а) $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$; в) $4x^3 + 21x^2 - 25$;

б) $x^4 + x^3 - 7x^2 - 13x - 6$; г) $5x^3 + 3x^2 - 5x - 3$.

553 Определите степень уравнения

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0.$$

Выведите формулы Виета для этого уравнения.

Дополнительные задания

Решение уравнений

Решите уравнение (554—557).

554 а) $(x + 1)^2 - 2(x + 1) + 1 = 0$; в) $(1 - x)^2 + 6(1 - x) + 8 = 0$;

б) $(x - 2)^2 - 4(x - 2) - 5 = 0$; г) $(3 - x)^2 + (3 - x) - 6 = 0$.

555 а) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$; в) $9x^4 - 82x^2 + 9 = 0$;

б) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$; г) $4x^4 + 9x^2 + 2 = 0$.

556 а) $x - 6\sqrt{x} + 5 = 0$; в) $5x - 6\sqrt{x} + 1 = 0$;

б) $3x - 10\sqrt{x} + 3 = 0$; г) $2x + 3\sqrt{x} - 2 = 0$.

557 а) $x^2 + 1 - \frac{x^2 + 3}{3} = \frac{x^2 + 2}{2} - \frac{x^2 + 4}{4}$;

б) $\frac{(x-2)^2}{12} - \frac{(x-1)^2}{3} = \frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{4}$.

Решение задач

558 а) Периметр прямоугольника равен 38 см. Найдите его стороны, если площадь прямоугольника равна 84 см^2 .

б) Детская площадка прямоугольной формы обнесена забором, длина которого 48 м. Найдите длины сторон этой площадки, если её площадь равна 140 м^2 .

559 Имеется прямоугольный кусок фанеры площадью 240 дм^2 . Из него изготовили квадратную крышку для ящика. Для этого от фанеры отпилили с одной стороны полосу шириной 5 дм, а с другой — шириной 6 дм. Определите размеры получившейся крышки.

560 В Третьяковской галерее висит картина художника Богданова-Бельского «Устный счёт». На классной доске записано выражение $\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}$. В чис-

лителе — сумма квадратов пяти последовательных целых чисел.

Ученики могут найти значение этого выражения устно, если они заметят, что сумма квадратов первых трёх из них равна сумме квадратов последних двух (проверьте!).



Существуют ли ещё пять последовательных целых чисел, которые обладают таким же свойством?

Подсказка. Вычисления будут проще, если при составлении уравнения буквой обозначить второе число.

- 561** В школе 400 учащихся ежедневно покупают завтрак, стоимость которого 30 р. Если столовая поднимет цену на завтрак, то повышение на каждые 5 р. приведёт к тому, что 10 школьников начнут приносить завтрак из дома. Если, однако, цена станет выше 100 р., то никто из учащихся не будет завтракать в столовой. Когда цена была поднята, столовая получила за день на 3200 р. больше, чем обычно. Сколько школьников перестали покупать завтрак в столовой?
- 562** Магазин покупает на оптовом складе партию тетрадей в 500 штук по цене 4 р. за тетрадь. Увеличение партии на каждые 50 тетрадей приводит к снижению цены одной тетради на 20 к. Эта скидка сохраняется только в том случае, если общая партия не превышает 750 тетрадей. Магазин дополнительно заплатил ещё 210 р. На сколько тетрадей увеличилась закупаемая партия?

● Теорема Виета и квадратный трёхчлен

- 563** Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_1 и x_2 . Запишите уравнение, корни которого равны:
а) mx_1 и mx_2 ; б) $\frac{m}{x_1}$ и $\frac{m}{x_2}$.
- 564** Дано уравнение $x^2 - 39x + 324 = 0$. Не вычисляя корней x_1 и x_2 данного уравнения, найдите: $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$; $x_1^2 + x_2^2$; $(x_1 - x_2)^2 + 4x_1x_2$; $x_1^3 + x_2^3$.
- 565** Напишите два каких-нибудь квадратных трёхчлена, имеющие одни и те же корни, равные:
а) -4 и 5; б) -2 и $-\frac{1}{3}$; в) $1\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$.
- 566** Докажите, что:
а) $\frac{a+2}{a-5} - \frac{3a}{a^2-7a+10} - \frac{2}{a-2} = \frac{3-a}{5-a}$;
б) $1 + \frac{a-4}{a-3} - \frac{a}{a+4} - \frac{7a}{a^2+a-12} = \frac{a-7}{a-3}$.
- 567** Упростите выражение:
а) $\frac{3a}{a^3-1} - \frac{3}{a^2+a+1} - \frac{1}{a-1}$; б) $\frac{2}{a+2} - \frac{6}{a^2-2a+4} - \frac{24}{a^3+8}$.

Вероятность, статистика, комбинаторика

568 На диаграмме (рис. 3.7) показано распределение площади земной суши между материками и частями света.



Рис. 3.7

1) Используя диаграмму, проверьте, все ли данные ниже утверждения являются верными:

а) Площадь Азии составляет чуть менее трети всей суши Земли.
б) Площадь Азии равна сумме площадей Северной и Южной Америки.

в) Сумма площадей Африки и всей Америки составляет более половины всей суши.

г) Площадь Африки равна сумме площадей Европы, Австралии и Антарктиды.

2) Общая площадь суши на нашей планете равна $1,49 \cdot 10^8 \text{ км}^2$. Вычислите по данным диаграммы площадь каждого материка и каждой части света. Результаты запишите, используя стандартный вид числа.

569 В таблице представлены результаты нескольких ведущих биатлонистов в стрельбе за сезон 2010/11 года.

Фамилия, страна	Число гонок	Стрельба в положении лёжа		Стрельба в положении стоя	
		Закрыто мишеней	Всего мишеней	Закрыто мишеней	Всего мишеней
Е. Устюгов, Россия	19	149	155	122	155
Т. Сикора, Польша	14	103	110	97	110
М. Фуркад, Франция	25	183	200	165	200
Э. Х. Свенсен, Норвегия	24	178	195	158	195
М. Максимов, Россия	13	91	100	77	100
Т. Бо, Норвегия	26	189	210	176	210

1) Для каждого биатлониста вычислите частоту попадания из положения лёжа и частоту попадания из положения стоя. Постройте по этим данным столбчатую диаграмму.

2) Используя полученные вами результаты, ответьте на вопросы:

а) У кого из биатлонистов вероятность того, что он закроет мишень из положения лёжа, выше? А из положения стоя?

б) Равны ли для биатлониста частоты событий «закрыть мишень из положения лёжа» и «закрыть мишень из положения стоя»? Как вы думаете, равны ли вероятности этих событий?

3) Для каждого биатлониста вычислите среднее число промахов за одну гонку.

570 а) В секции фигурного катания 5 мальчиков и 7 девочек. Тренер составляет танцевальную пару. Сколько различных пар он может составить?

б) В турнире по борьбе участвуют 7 спортсменов. Сколькими способами могут распределиться между ними места в турнире?

Чему вы научились

Что надо знать (основные теоретические сведения)

1. Какое уравнение называется квадратным? Приведите пример. Назовите коэффициенты a , b , c этого уравнения.

2. Запишите формулу корней квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

3. Сколько корней может иметь квадратное уравнение? Как это зависит от дискриминанта? Определите, сколько корней имеет уравнение:

а) $3x^2 - 7x - 4 = 0$; б) $2x^2 + x + 2 = 0$; в) $4x^2 - 4x + 1 = 0$.

4. Запишите формулу корней квадратного уравнения с чётным вторым коэффициентом.

5. Приведите пример неполного квадратного уравнения вида $ax^2 + bx = 0$. Покажите на этом примере, как решаются уравнения такого вида. Сколько корней имеет уравнение вида $ax^2 + bx = 0$?

6. Приведите пример неполного квадратного уравнения вида $ax^2 + c = 0$. Покажите на этом примере, как решаются уравнения такого вида. Сколько корней может иметь уравнение вида $ax^2 + c = 0$?

7. Сформулируйте теорему Виета. Чему равны произведение и сумма корней уравнения $x^2 - 27x + 180 = 0$?

- 8 Чему равны сумма и произведение корней неприведённого квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$? Определите знаки корней уравнения: а) $3x^2 - 5x + 2 = 0$; б) $2x^2 + 7x - 3 = 0$. В случае если корни имеют разные знаки, определите, модуль какого из них больше.
- 9 Приведите пример квадратного трёхчлена. Запишите формулу для разложения на множители квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, корни которого равны x_1 и x_2 . Разложите на множители многочлен $-2x^2 + x + 3$.

Это надо уметь (обязательные результаты обучения)

- 1 Решите уравнение:
а) $3x^2 + 5x - 2 = 0$; б) $x^2 - 2x - 1 = 0$; в) $4x^2 - 12x + 9 = 0$.
- 2 Вычислив дискриминант квадратного уравнения, определите: 1) имеет ли уравнение корни; 2) если имеет, то сколько; 3) рациональными или иррациональными числами являются корни:
а) $5x^2 - 11x + 2 = 0$; б) $2x^2 - x - 2 = 0$;
в) $x^2 + 3x + 5 = 0$; г) $9x^2 + 6x + 1 = 0$.
- 3 Решите уравнение:
а) $3x^2 = 2x + 4$; б) $(x - 1)(2x + 3) = -2$; в) $\frac{x^2 + 7}{2} = 4x$.
- Решите задачу (4–5).
- 4 Вокруг детской площадки прямоугольной формы сооружена изгородь, длина которой 30 м. Определите размеры площадки, если её площадь равна 50 м².
- 5 Сумма n последовательных натуральных чисел, начиная с 1, вычисляется по формуле $A = \frac{n^2 + n}{2}$. Сколько последовательных натуральных чисел, начиная с 1, надо сложить, чтобы в сумме получить 55?
- 6 Решите уравнение:
а) $3x^2 - 2x = 0$; б) $2x^2 - 18 = 0$; в) $3x^2 - 9 = 0$;
г) $2x^2 + 3x = x^2$; д) $4x^2 = 9$; е) $5x^2 + 1 = 0$.
- 7 Укажите, чему равны произведение и сумма корней уравнения, и определите знаки корней:
а) $x^2 - 7x + 12 = 0$; б) $x^2 - 4x - 32 = 0$;
в) $2x^2 + 3x + 1 = 0$; г) $3x^2 + 11x - 4 = 0$.
- 8 Разложите, если возможно, на множители:
а) $x^2 + 6x - 7$; б) $4x^2 - 9x + 2$; в) $3x^2 - 2x + 1$.

Проверьте себя (тест)

- 1 Решите уравнение $2x^2 - 13x + 21 = 0$.
- 2 Соотнесите каждое уравнение с числом его корней.
 А) $x^2 + 3x - 10 = 0$ Б) $x^2 - 3x + 3 = 0$ В) $4x^2 + 4x + 1 = 0$
 1) один корень 2) два корня 3) нет корней
- 3 При каких значениях переменной x дробь $\frac{x-2}{x^2+4x-21}$ не имеет смысла?
- 4 Найдите корни уравнения $5x^2 - 8 = (x - 4)(3x - 1) + 8x$.
- 5 Дано уравнение $x^2 + 2x + c = 0$, где c — некоторое число, x — переменная. Найдите значение c , при котором один из корней уравнения равен 6.
- 6 При каком из данных значений c уравнение $x^2 - 8x + c = 0$ не имеет корней?
 1) 5 2) 7 3) 16 4) 20
- 7 Сколько корней имеет уравнение $(2x^2 - 3x + 2)(2x^2 - x - 2) = 0$?
- 8 При каких значениях a и c уравнение $ax^2 + c = 0$ не имеет решения?
 1) $a > 0, c = 0$ 3) $a < 0, c < 0$
 2) $a > 0, c < 0$ 4) $a < 0, c > 0$
- 9 Решите уравнение $2x^2 = \frac{1}{2}$.
- 10 Решите уравнение $x^2 = 3x$.
- 11 Найдите значения x , при которых значения выражений $x - x^3$ и $2x - 5x^3$ равны.
- 12 Какое из следующих уравнений является биквадратным уравнением?
 1) $x^4 + 3x^2 + x = 0$ 3) $x^4 + x - 5 = 0$
 2) $x^4 + 5x^3 - 6 = 0$ 4) $x^4 + x^2 + 1 = 0$
- 13 Найдите значения x , при которых выполняется равенство $x^4 = 8x^2 + 9$.
- 14 Укажите корни уравнения $x^2 + (m - n)x - mn = 0$.
 1) $x_1 = m, x_2 = n$ 3) $x_1 = -m, x_2 = n$
 2) $x_1 = -m, x_2 = -n$ 4) $x_1 = m, x_2 = -n$

- 15 Разложите, если возможно, на множители квадратный трёхчлен $2x^2 + 15x + 25$.

1) это невозможно

3) $(x + 5)(x + 2,5)$

2) $(x + 5)(2x + 5)$

4) $2(x + 5)(x + 0,5)$

- 16 Прочитайте задачу: «Одно число на 5 меньше другого. Сумма большего числа и квадрата меньшего равна 17. Найдите эти числа». Обозначьте меньшее число буквой x . Какое уравнение соответствует условию задачи?

1) $x^2 + 11x + 8 = 0$

3) $x^2 - 9x + 8 = 0$

2) $x^2 + x - 12 = 0$

4) $x^2 + x - 22 = 0$

- 17 Решите задачу, условие которой сформулировано в предыдущем задании.

- 18 С вертолётa, летящего на высоте 120 м, на луг сброшен груз с начальной скоростью 10 м/с. Через сколько секунд груз приземлится? (Воспользуйтесь формулой $h = vt + 5t^2$.)

1) через 12 с

2) через 10 с

3) через 6 с

4) через 4 с

Системы уравнений

До сих пор вам приходилось решать уравнения, которые содержали одну переменную. Но вы знаете, что задачи, как правило, содержат две или даже больше неизвестных величин. И для перевода подобной задачи на математический язык удобно использовать не одну, а две или несколько букв. При этом возникает уравнение с несколькими переменными. В этой главе вы будете изучать уравнения с двумя переменными. Такие уравнения можно интерпретировать графически на координатной плоскости. А значит, снова встретятся алгебра и геометрия, формулы и графики.

4.1 Линейное уравнение с двумя переменными

1 Пусть надо найти два числа, сумма которых равна их удвоенной разности. Обозначим одно число буквой x , а другое — буквой y . Тогда в соответствии с условием задачи $x + y = 2(x - y)$.

Это равенство, которое мы составили по условию задачи, называют *уравнением с двумя переменными*. Вообще любое равенство, содержащее две переменные, например $6x - 5y + 1 = 0$, $y = x^2$, $x^2 + y^2 = 25$, $xy = 12$, можно рассматривать как уравнение с двумя переменными.

Для уравнения с одной переменной главным был вопрос о его корнях. Имея уравнение с двумя переменными, мы будем говорить о парах чисел — его *решениях*.

Решением уравнения с двумя переменными называется всякая пара значений переменных, которая обращает это уравнение в верное числовое равенство.

Так, решением уравнения $x + y = 2(x - y)$ является пара чисел $x = 9$, $y = 3$. В самом деле, равенство $9 + 3 = 2 \cdot (9 - 3)$ верное. Точно так же решениями этого уравнения служат пары $(15; 5)$, $(-6; -2)$, $(30; 10)$. А вот пара $(8; 2)$ его решением не является, так как равенство $8 + 2 = 2 \cdot (8 - 2)$ неверное.

Обратите внимание: мы записали пары значений переменных в круглых скобках как координаты точек на плоскости. При такой записи на первом месте обязательно ставят значение той переменной, которая по алфавиту идёт первой. В данном случае это переменная x .

2 Познакомимся подробнее с важным видом уравнений с двумя переменными, так называемыми *линейными уравнениями*.

Линейным уравнением с двумя переменными называется уравнение вида $ax + by = c$, где a , b и c — произвольные числа.

Например, уравнение $6x - 5y = 7$ является линейным, а уравнение $\frac{6}{x} - \frac{5}{y} = 7$ нет.

Уравнение с двумя переменными, так же как и уравнение с одной переменной, можно преобразовывать: переносить слагаемое из одной части уравнения в другую, меняя при этом его знак на противоположный; умножать и делить обе части уравнения на одно и то же число, отличное от нуля. При этом получается уравнение, имеющее те же решения, что и исходное.

Используя эти свойства, в линейном уравнении можно выражать одну переменную через другую. Выразим, например, из уравнения $3x + 5y = 10$ переменную y через переменную x :

$$\begin{aligned} 5y &= -3x + 10, \\ y &= -0,6x + 2. \end{aligned}$$

Говорят, что *уравнение $3x + 5y = 10$ решили относительно y* .

С линейным уравнением, записанным в таком виде, удобно работать, в частности находить пары чисел, являющиеся его решениями; в качестве x можно брать любое число, а соответствующее значение y вычислять по формуле $y = -0,6x + 2$.

Например, если $x = 0$, то $y = 2$; получаем пару $(0; 2)$. Если $x = -1$, то $y = 1,4$; получаем решение $(-1; 1,4)$. Понятно, что таких пар чисел x и y , удовлетворяющих уравнению $3x + 5y = 10$, можно указать сколько угодно. Иными словами, это уравнение имеет бесконечное множество решений.

3 Рассмотрим задачу на старинный сюжет, который вам, возможно, знаком.

В клетке сидят фазаны и кролики, всего у них 18 ног. Сколько в клетке тех и других?

Для перевода условия этой задачи на математический язык естественно ввести две переменные.

Пусть в клетке x фазанов и y кроликов. Так как у фазанов по 2 ноги, а у кроликов по 4, то приходим к уравнению

$$2x + 4y = 18.$$

Разделив обе его части на 2, получим более простое уравнение

$$x + 2y = 9.$$

Понятно, что ни количество фазанов, ни количество кроликов отрицательным или дробным числом выразаться не могут. Поэтому надо найти такие пары x и y , удовлетворяющие этому уравнению, которые составлены из натуральных чисел, или, как говорят, *решить уравнение в натуральных числах*.

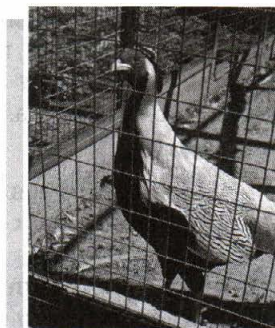
Выразив из уравнения переменную y через переменную x , получим $y = \frac{9-x}{2}$. Далее воспользуемся простым перебором: будем подставлять вместо переменной x числа 1, 2, ... и вычислять соответствующие значения переменной y . Всего получим четыре пары x и y , подходящие по смыслу задачи (см. таблицу):

x	1	3	5	7
y	4	3	2	1

Таким образом, задача имеет четыре решения: в клетке могут сидеть 1 фазан и 4 кролика, 3 фазана и 3 кролика, 5 фазанов и 2 кролика, 7 фазанов и 1 кролик.

Подобные задачи интересовали математиков ещё в глубокой древности. Много занимался вопросом о решении в целых числах уравнений с двумя и более переменными древнегреческий учёный Диофант Александрийский (III в. до н. э.). Он изобрёл разные способы решения подобных уравнений, поэтому их часто называют *диофантовыми уравнениями*.

- Что называется решением уравнения с двумя переменными? Пользуясь этим определением, покажите, что пара (2; 2) является решением уравнения $x + y = xy$, а пара (2; 3) не является.
- Какая из пар: (-10; -5) или (-5; -10) — является решением уравнения $x - 2y = 15$?



- Обозначьте в каждом случае неизвестные величины буквами и составьте по условию задачи уравнение с двумя переменными:
- Площадь прямоугольника равна 36 см^2 . Чему равны длины его сторон?
 - Периметр равнобедренного треугольника равен 16 см . Чему равны длины боковой стороны и основания?
 - Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 5 см . Чему равны длины его катетов?
- Есть ли среди составленных уравнений линейное? Приведите свой пример линейного уравнения с двумя переменными и уравнения, не являющегося линейным.
- В фрагменте 2 уравнение $3x + 5y = 10$ решено относительно переменной y . Прокомментируйте каждый шаг выполненных преобразований. Какие свойства уравнений использовались? Решите это же уравнение относительно x .
- Объясните, как составлено уравнение в задаче о фазанах и кроликах (фрагмент 3). Составьте уравнение по условию этой же задачи, обозначив буквой x число кроликов, а буквой y число фазанов. Доведите решение до конца, выполнив перебор.

A

- 571** Проверьте, является ли пара чисел $(-2; 2)$ решением уравнения: а) $x - y = -4$; б) $x + 2 = 2y$; в) $x^2 - y = 2$.
- 572** Какая из указанных пар чисел не является решением уравнения $xy + x = 2$?
- $(-2; 2)$
 - $(0,5; 3)$
 - $(-3; -1)$
 - $(-0,5; -5)$
- 573** ■ ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО ■ Какие из утверждений являются верными? Неверные утверждения переформулируйте так, чтобы они стали верными:
- Пара чисел $(-1; 3)$ является решением уравнения $x + 2y = 5$.
 - Пара чисел $(-2; -1)$ не является решением уравнения $x^2 + 4y = 8$.
 - Пара чисел $(-4; 3)$ не является решением уравнения $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = 0$.
 - Пара чисел $(-3; 0)$ является решением уравнения $x^2 + y^2 = 9$.
 - Пара чисел $(1; 2)$ является решением уравнения $x^3 + y^3 = 7$.
- 574** Какие из данных уравнений являются линейными?
- $2x + 3y = 6$
 - $5x - 2y = 0$
 - $3xy + 2y = 2$
 - $4x^2 - 3y = 0$
 - $\frac{2}{x} + \frac{7}{y} = 1$
 - $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$
- 575** Выразите из уравнения $5x - 2y = 15$ переменную y через x и найдите какие-нибудь три решения этого уравнения. Затем выразите x через y и найдите ещё два его решения.

576 Найдите несколько решений уравнения, предварительно выразив одну переменную через другую:

а) $x + y = 20$; в) $2x - y + 10 = 0$;

б) $4x + y = 0$; г) $x - 3y + 1 = 0$.

577 Запишите все пары натуральных чисел, являющиеся решениями уравнения:

а) $x + y = 6$; б) $xy = 12$; в) $2x + y = 10$; г) $0,5x + y = 6$.

Указание. Воспользуйтесь методом перебора.

578 Тест по геометрии содержал задачи, оценённые 3 баллами и 4 баллами. Среди задач, решённых Олегом, были задачи как одного, так и другого уровня. Всего он набрал 27 баллов. Могло ли быть так, что Олег решил: а) 5 задач, оценённых 3 баллами? б) 3 задачи, оценённые 4 баллами?

Б

■ АНАЛИЗИРУЕМ И РАССУЖДАЕМ (579—580) ■

579 Имеет ли уравнение решения? Если имеет, то приведите примеры решений:

а) $x^2 = y^2$; в) $xy = 0$; д) $x^2 + y^2 = 0$;

б) $xy = 8$; г) $x = y^2$; е) $|x| + |y| + 1 = 0$.

580 Объясните, почему решением данного уравнения не может служить пара положительных чисел:

а) $4x + 3y = -5$; б) $-2x - 7y = 8$.

Решите задачу, составив по её условию уравнение с двумя переменными (**581—585**).

581 Петя заплатил 19 р., используя только пятирублёвые и двухрублёвые монеты. Как он мог произвести оплату? Найдите все возможные варианты.

582 Ученики начальной школы на уроке математики выкладывают из палочек пятиугольники и шестиугольники. Всего в наборе 100 палочек. Сколько пятиугольников и сколько шестиугольников можно выложить, чтобы использованными оказались все палочки?

583 Учащиеся 8 класса выполняли тест, содержащий задания по алгебре и геометрии. За каждый верный ответ на алгебраический вопрос выставялось 3 балла, а на геометрический — 4 балла. Ученик верно ответил на все вопросы теста и получил 100 баллов. Сколько в тесте было заданий по алгебре и сколько по геометрии?

584 Андрей работает летом в кафе. За каждый час работы ему платят 100 р. и высчитывают 20 р. за каждую разбитую тарелку. На прошедшей неделе он заработал 1800 р. Определите, сколько часов он работал и сколько разбил тарелок, если известно, что он работает не более 3 ч в день.

585 На неделю учащимся 8 класса было предложено для решения два списка задач: по алгебре и по геометрии. За каждую правильно решённую задачу по алгебре выставлялось 4 балла, а по геометрии — 5 баллов. Николай за выполненную им работу получил 80 баллов. Сколько задач по алгебре и сколько по геометрии решил Николай, если известно, что в каждом списке было 15 задач?

4.2 График линейного уравнения с двумя переменными

1 Найдём несколько решений уравнения $x + 2y = 4$. Для этого запишем уравнение в виде $y = -0,5x + 2$ и выполним соответствующие вычисления. Их результаты представлены в таблице:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
y	3	2,5	2	1,5	1	0,5	0	-0,5	-1	-1,5

Каждое решение уравнения $x + 2y = 4$ можно изобразить точкой на координатной плоскости (рис. 4.1). Мы видим, что все отмеченные точки «укладываются» на одну и ту же прямую (рис. 4.2). Говорят, что эта прямая — *график уравнения* $x + 2y = 4$ (или, что то же самое, график уравнения $y = -0,5x + 2$).

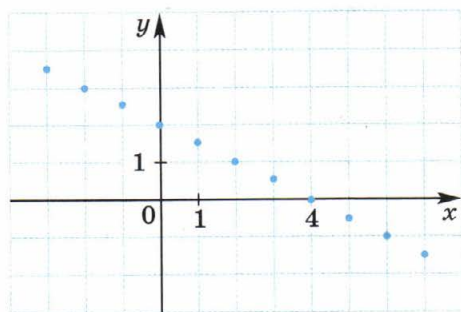


Рис. 4.1

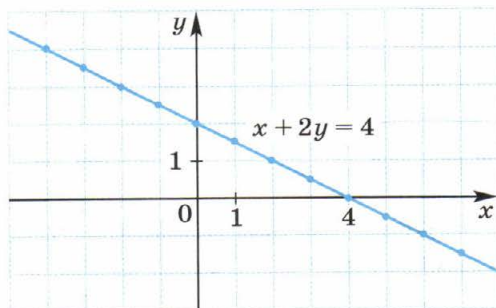


Рис. 4.2

Вообще любому уравнению, связывающему переменные x и y , соответствует некоторое множество точек координатной плоскости — график этого уравнения. График уравнения с двумя переменными определяется следующим образом:

Точка с координатами x и y принадлежит графику уравнения с двумя переменными в том и только том случае, когда пара чисел $(x; y)$ является решением этого уравнения.

Иными словами:

Если точка с координатами x и y принадлежит графику уравнения с двумя переменными, то пара чисел $(x; y)$ является его решением; и наоборот, если пара чисел $(x; y)$ является решением уравнения с двумя переменными, то точка с координатами x и y принадлежит его графику.

Мы видели, что график линейного уравнения $x + 2y = 4$ есть прямая линия. Построим теперь график какого-нибудь линейного уравнения, в котором один из коэффициентов при переменных равен 0.

Возьмём уравнение $0x + 2y = 7$, т. е. $y = 3,5$. Решением этого уравнения является любая пара чисел, в которой x — произвольное число, а $y = 3,5$, например $(2; 3,5)$, $(0; 3,5)$, $(-1; 3,5)$. Его график, как вы уже знаете, есть прямая, параллельная оси x (рис. 4.3).

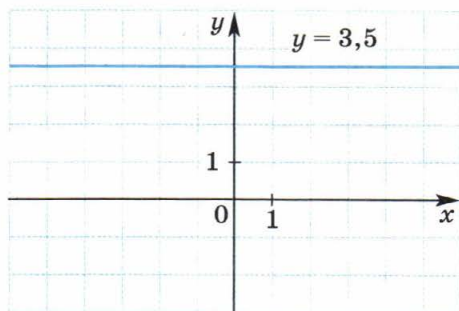


Рис. 4.3

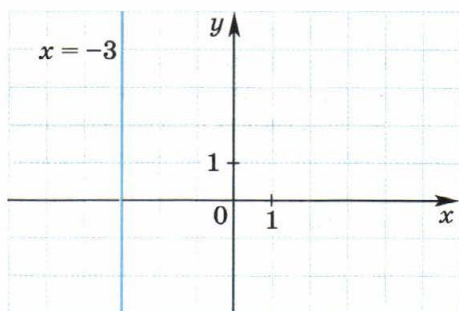


Рис. 4.4

Точно так же графиком уравнения $-4x + 0y = 12$, т. е. $x = -3$, служит прямая, параллельная оси y (рис. 4.4).

Графиком уравнения $ax + by = c$, где коэффициенты a и b не равны нулю одновременно, является прямая.

Верно также обратное утверждение:

Всякая прямая на координатной плоскости является графиком уравнения вида $ax + by = c$, где коэффициенты a и b не равны нулю одновременно.

Поэтому уравнение вида $ax + by = c$, в котором хотя бы один из коэффициентов a и b отличен от 0, называют *уравнением прямой*.

2 Из сказанного выше понятен способ построения графика линейного уравнения: достаточно построить две любые его точки и провести через них прямую.

Пример. Построим прямую, которая задаётся уравнением

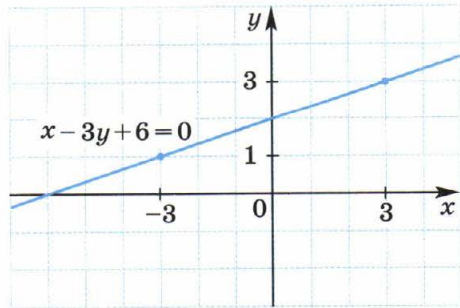
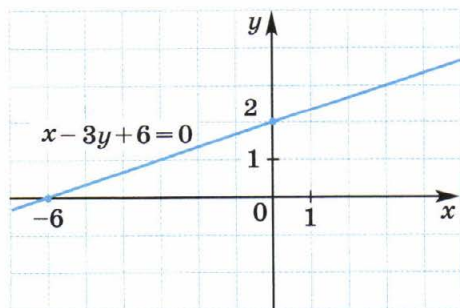
$$x - 3y + 6 = 0.$$

Найдём, например, точки, в которых эта прямая пересекает оси координат. Подставим в уравнение $x = 0$, тогда $-3y + 6 = 0$, т. е. $y = 2$. Значит, график проходит через точку $(0; 2)$.

Теперь подставим в уравнение $y = 0$, тогда $x + 6 = 0$, т. е. $x = -6$. Значит, прямая проходит через точку $(-6; 0)$.

Отметим на координатной плоскости точки $(0; 2)$ и $(-6; 0)$ и проведём через них прямую. Эта прямая и есть график уравнения $x - 3y + 6 = 0$ (рис. 4.5).

График этого уравнения можно построить и по другим точкам. Чтобы проще было найти их координаты, выразим переменную y через x ; получим уравнение $y = \frac{1}{3}x + 2$. Понятно, что удобнее отмечать точки с целыми координатами. Поэтому возьмём значения x , кратные 3, например 3 и -3 . Если $x = 3$, то $y = 3$; если $x = -3$, то $y = 1$. Отметим на координатной плоскости точки $(3; 3)$ и $(-3; 1)$ и проведём через них прямую (рис. 4.6).



■ Рис. 4.5

■ Рис. 4.6

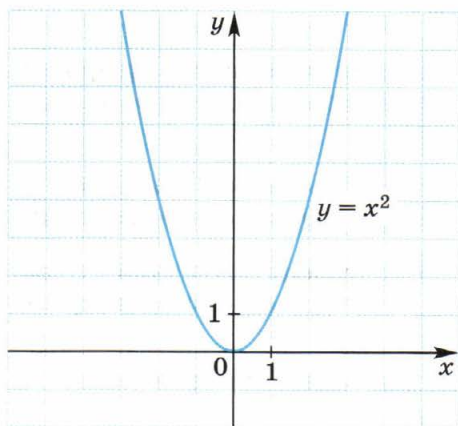


Рис. 4.7

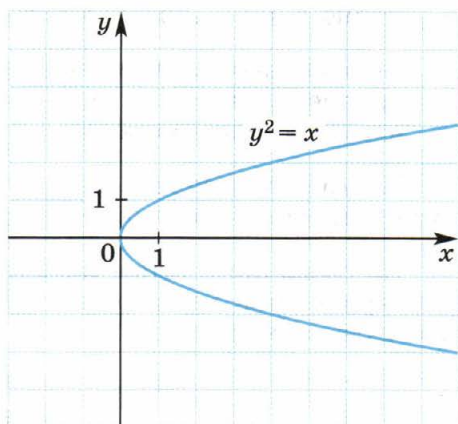


Рис. 4.8

В Приведём примеры графиков уравнений, не являющихся линейными. Некоторые из них вам уже встречались. Так, график уравнения $y = x^2$ — это хорошо знакомая вам парабола (рис. 4.7), а график уравнения $y^2 = x$ — это такая же парабола, однако она иначе расположена в координатной плоскости (рис. 4.8).

На рисунках 4.9 и 4.10 изображены графики новых для вас уравнений. Название графика уравнения $x^2 + y^2 = 25$ вы знаете — это окружность. Центр её находится в начале координат, а радиус равен 5. А график уравнения $x^3 + y^3 = 3xy$ называют *декартовым листом*. Интересно, что эта кривая когда-то носила поэтическое

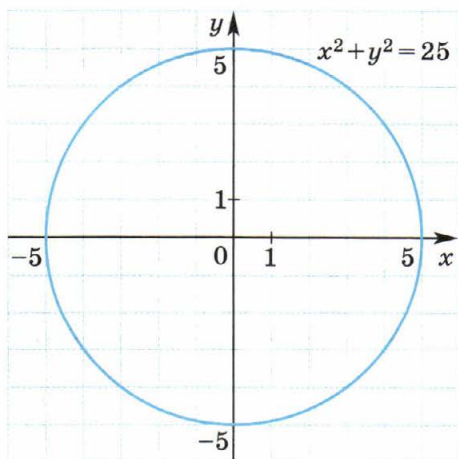


Рис. 4.9

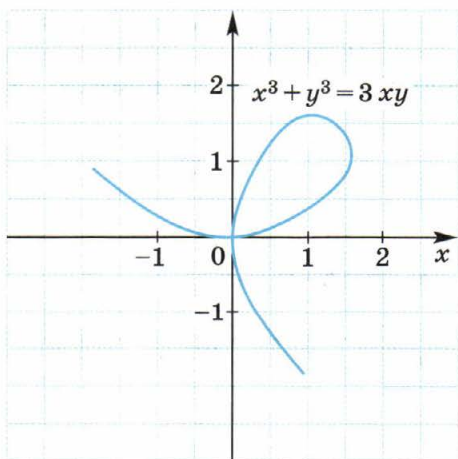


Рис. 4.10

название «лист жасмина», а декартовым листом её впоследствии назвали потому, что её уравнение составил великий французский математик и философ Рене Декарт.

- а) Убедитесь, что точка $(3; 10)$ принадлежит графику уравнения $10x - y = 20$. Дайте алгебраическое истолкование этого факта, используя термин «решение уравнения».
- б) Убедитесь, что пара чисел $(-5; 3)$ является решением уравнения $xy = -15$. Дайте геометрическое истолкование этого факта, используя термин «график уравнения».
- Графиком какого из уравнений: $\frac{x}{2} + y = 5$ или $\frac{2}{x} + y = 5$ — является прямая? Назовите коэффициенты a , b и c в уравнении прямой.
- Во фрагменте 2 рассмотрены два способа построения графика уравнения $x - 3y + 6 = 0$. Что общего у этих способов и чем они различаются? Пользуясь этим примером как образцом, постройте двумя способами прямую, которая задаётся уравнением $2x - y = 4$.
- Графики каких уравнений, не являющихся линейными, вам знакомы?

А

586 Выпишите уравнения, графиками которых являются прямые:

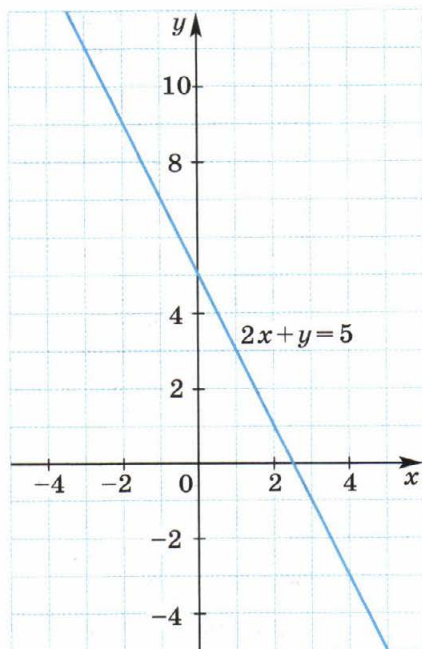
- | | |
|----------------------|--|
| 1) $x^2 - y^2 = 1$; | 5) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} + 2 = 0$; |
| 2) $x + y = 1$; | 6) $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} + 2 = 0$; |
| 3) $2x + 3y = 4$; | 7) $3x - 4y = 12$; |
| 4) $xy = 1$; | 8) $\frac{x-y}{3} = 1$. |

587 На рисунке 4.11 изображён график уравнения $2x + y = 5$. Найдите с помощью графика несколько решений этого уравнения, составленных из целых чисел. Проверьте подстановкой, правильно ли вы указали решения.

ДЕЙСТВУЕМ ПО АЛГОРИТМУ
(588–589)

588 Постройте прямую, являющуюся графиком уравнения, найдя точки пересечения с осями координат:

- а) $x + y = 5$; в) $x - y + 1 = 0$;
б) $x - y = 3$; г) $x + y + 4 = 0$.



■ Рис. 4.11

- 589** Постройте прямую, заданную уравнением (воспользуйтесь любым способом):
а) $3x - y = 6$; в) $2x + 3y = -6$;
б) $2x + y = 10$; г) $3x - 4y = 12$.
- 590** Запишите уравнение прямой, если известны коэффициенты a , b и c , и построьте эту прямую:
а) $a = 0$, $b = 3$, $c = 6$;
б) $a = 0$, $b = 2$, $c = -5$;
в) $a = 2$, $b = 0$, $c = -10$;
г) $a = 5$, $b = 0$, $c = 5$;
д) $a = 2$, $b = 4$, $c = 0$;
е) $a = 4$, $b = 2$, $c = 0$.
- 591** Постройте прямую $7x + 3y - 21 = 0$. Проходит ли она через точку: а) $(11; -19)$; б) $(-9; 28)$?
- 592** а) Проходит ли прямая $5x - 12y = 29$ через точку $A(20; 6)$? через точку $B(-11; -7)$?
б) Принадлежит ли прямой $8x + 7y = 56$ точка $A(3,5; 4)$? точка $B(-7; 15)$?
- 593** Какая из прямых проходит через точки $M(-3; -4)$ и $N(6; 2)$?
1) $2x - 3y = 18$ 3) $2x - 3y = 6$
2) $2x + 3y = -18$ 4) $3x - 2y = -6$
- 594** Дана прямая $2x - y + 3 = 0$.
а) Найдите ординату точки этой прямой, абсцисса которой равна 3; -1; -6.
б) Найдите абсциссу точки этой прямой, ордината которой равна 7; 1; -5.
в) Найдите координаты точек, в которых эта прямая пересекает оси координат.
- 595** Постройте прямые в одной системе координат и определите координаты точки их пересечения. Проверьте результат подстановкой найденной пары чисел в уравнения:
а) $4x - 3y = 12$ и $2x + 2y = 1$;
б) $2x + y = 4$ и $7x - 2y = 3$.
- 596** Определите, проходит ли окружность $x^2 + y^2 = 25$, изображённая на рисунке 4.9, через точку:
а) $A(0; -5)$; б) $B(-3; 4)$; в) $C(4; -3)$; г) $D(2; 4,5)$.
Покажите на рисунке положение каждой из этих точек в координатной плоскости.
- 597** Принадлежит ли графику, изображённому на рисунке 4.10, точка: а) $M\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$; б) $D(1; 0,5)$?

Б

598 Постройте в одной и той же системе координат следующие прямые: $3x + 2y - 18 = 0$, $x + 2y - 13 = 0$, $3x - 15 = 0$ и $2y - 12 = 0$.

Определите координаты точек пересечения:

а) прямых $3x + 2y - 18 = 0$ и $2y - 12 = 0$;

б) прямых $x + 2y - 13 = 0$ и $3x - 15 = 0$.

599 Прямые $5x + 2y = 10$, $x = -2$, $y = -5$, попарно пересекаясь, образуют треугольник. Вычислите его площадь.

■ РАССУЖДАЕМ (600–603) ■

600 В одной системе координат постройте прямые $x - 2y = 6$ и $x - 2y = -1$. Объясните, почему эти прямые не имеют общей точки.

601 1) Выпишите уравнения, которые задают ту же прямую, что и уравнение $2x + 3y = 5$:

$$4x + 6y = 10, \quad 2x + 3y = 12, \quad 0,2x + 0,3y = 0,5,$$

$$4x + 6y = 5, \quad -6x - 9y = -15, \quad 2x - 3y = 5.$$

2) Составьте несколько уравнений, которые задают ту же самую прямую, что и уравнение $2x - y = 10$.

602 а) Известно, что прямая $ax + 3y = 5$ проходит через точку $(10; -5)$. Найдите коэффициент a и постройте эту прямую.

б) Известно, что прямая $5x + by = 2$ проходит через точку $(-2; 4)$. Найдите коэффициент b и постройте эту прямую.

603 а) Найдите точки первой координатной четверти с целыми координатами, которые принадлежат прямой $x + 3y = 12$. Дайте ответ, не выполняя построения.

б) Сколько точек второй координатной четверти с целыми координатами принадлежит прямой $3x - 4y + 48 = 0$? Дайте ответ, не выполняя построения.

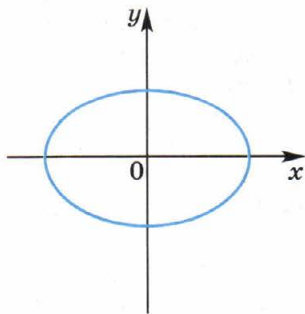
604 Линия, изображённая на рисунке 4.12, является эллипсом. Уравнение эллипса

можно записать в виде $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$, где

a и b — положительные числа и $a \geq b$.

1) Найдите координаты точек пересечения с осями координат эллипса, за-

данного уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.



■ Рис. 4.12

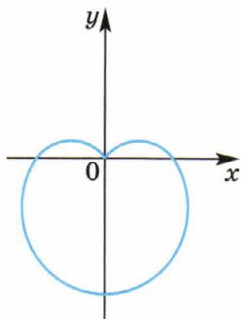


Рис. 4.13

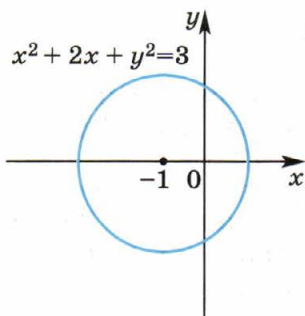


Рис. 4.14

2) Определите ординаты точек эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, абсциссы которых равны 1.

3) Постройте эллипс, заданный уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

605 Графиком уравнения $(x^2 + y^2 + y)^2 = x^2 + y^2$ является кривая, изображённая на рисунке 4.13. Она называется *кардиоидой* (так как имеет форму сердца). Найдите координаты точек пересечения кардиоиды с осями координат.

606 Графиком уравнения $x^2 + 2x + y^2 = 3$ является окружность (рис. 4.14). Вычислите координаты точек пересечения этой окружности с осями координат.

4.3 уравнение прямой вида $y = kx + l$

1 Вам уже неоднократно приходилось решать линейное уравнение с двумя переменными относительно переменной y . При этом получается уравнение вида $y = kx + l$, где k и l — некоторые числа. Например, решив относительно y уравнение $3x - 2y = 6$, получим уравнение $y = 1,5x - 3$, где $k = 1,5$ и $b = -3$. В таком виде можно представить любое линейное уравнение вида $ax + by = c$, у которого коэффициент при y отличен от 0. Иными словами, в таком виде может быть записано уравнение любой прямой, кроме вертикальной.

Запись уравнения прямой в виде $y = kx + l$ очень удобна. Изучив этот пункт, вы увидите, что непосредственно из этой записи, не выполняя построения, легко узнать, как прямая расположена в координатной плоскости.

2 Положение в координатной плоскости прямой, заданной уравнением вида $y = kx + l$, зависит от значений коэффициентов k и l . Чтобы выяснить, в чём состоит эта зависимость, остановимся сначала на частном случае, когда $l = 0$, т. е. рассмотрим график уравнения $y = kx$.

Прежде всего отметим следующий факт:

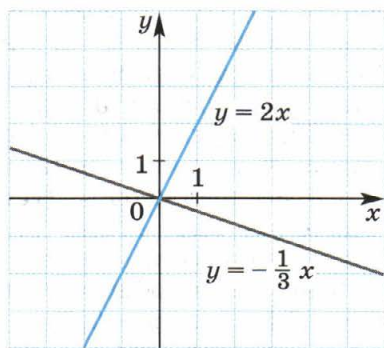
Прямая, которая является графиком уравнения $y = kx$, проходит через начало координат.

В самом деле, если $x = 0$, то и $y = 0$, а это и означает, что точка $O(0; 0)$ принадлежит графику. Обратите внимание: для построения прямой $y = kx$ достаточно найти координаты одной лишь её точки: вторая уже имеется — это начало координат.

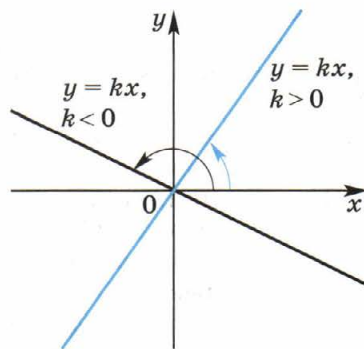
Построим в одной и той же системе координат прямые, заданные уравнениями $y = 2x$ и $y = -\frac{1}{3}x$, в которых коэффициенты при x имеют разные знаки (рис. 4.15). Прямая $y = 2x$, проходя через третий и первый координатные углы, поднимается вверх; так выглядит график любого уравнения $y = kx$ с положительным коэффициентом k .

Прямая $y = -\frac{1}{3}x$, проходя через второй и четвёртый координатные углы, опускается вниз; так выглядит график любого уравнения $y = kx$ с отрицательным коэффициентом k .

И вообще, если $k > 0$, то угол, который образует луч, являющийся частью прямой $y = kx$ и расположенный в верхней полуплоскости, с лучом Ox , — острый; если $k < 0$, то этот угол тупой (рис. 4.16). (Если $k = 0$, то график уравнения $y = kx$ совпадает с осью x .)



■ Рис. 4.15



■ Рис. 4.16

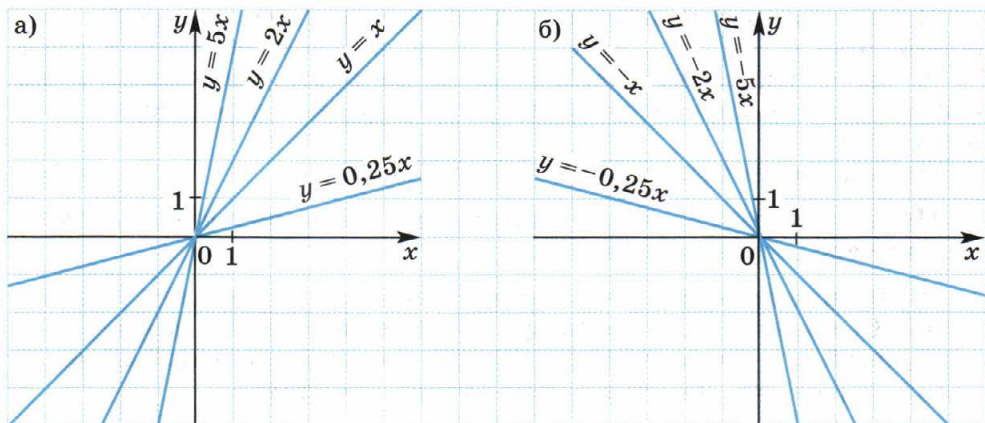


Рис. 4.17

На рисунке 4.17, а, б построены графики уравнений $y = kx$ при различных значениях k — положительных и отрицательных. Вы видите, что, чем больше $|k|$, тем круче поднимается или опускается прямая.

З Выясним теперь, каково взаимное расположение прямых, заданных уравнениями вида $y = kx + l$, в которых коэффициенты при x одинаковы.

Построим в одной системе координат две такие прямые, например прямые $y = 0,5x$ и $y = 0,5x + 3$ (рис. 4.18). При любом x ордината точки прямой $y = 0,5x + 3$ на 3 единицы больше ординаты соответствующей точки прямой $y = 0,5x$. Таким образом, прямая $y = 0,5x + 3$ получается сдвигом прямой $y = 0,5x$ на 3 единицы вверх вдоль оси y . Понятно, что угол между лучом Ox и частью прямой, расположенной в верхней полуплоскости, при этом не меняется. Значит, прямые $y = 0,5x$ и $y = 0,5x + 3$ параллельны. (Их параллельность можно обосновать так: значения выражений $0,5x$ и $0,5x + 3$ ни при каком x не могут оказаться равными, а это и означает, что прямые $y = 0,5x$ и $y = 0,5x + 3$ не имеют общих точек.)

Точно так же каждая из прямых $y = 0,5x - 1$, $y = 0,5x + 2,5$, $y = 0,5x - 4$ параллельна прямой $y = 0,5x$. А значит, все они параллельны между собой (рис. 4.19, а).

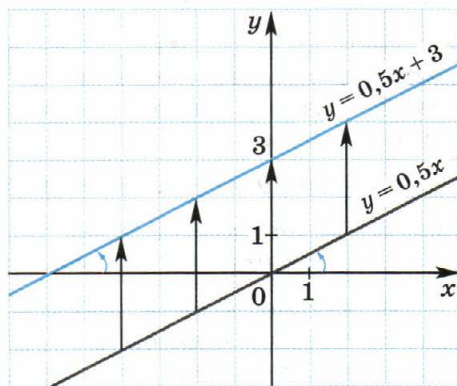


Рис. 4.18

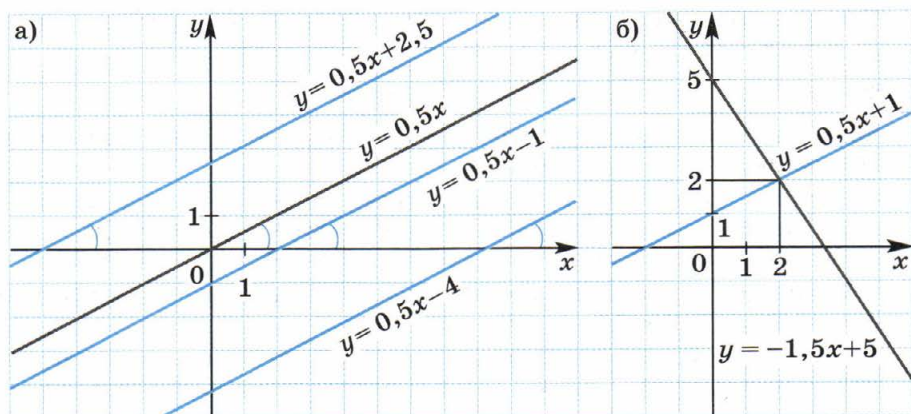


Рис. 4.19

Из этих рассуждений понятно, что величина угла между лучом Ox и частью прямой $y = kx + l$, расположенной в верхней полуплоскости, зависит только от значения коэффициента k . Поэтому k называют *угловым коэффициентом* прямой $y = kx + l$.

Если у двух несовпадающих прямых угловые коэффициенты одинаковы, то эти прямые параллельны.

Если же две прямые имеют разные угловые коэффициенты, то эти прямые пересекаются. Например, пересекаются прямые $y = 0,5x + 1$ и $y = -1,5x + 5$ (рис. 4.19, б).

4 Коэффициент l в уравнении $y = kx + l$ также имеет определённый геометрический смысл: это ордината точки пересечения прямой с осью y . В самом деле, если подставить в уравнение $y = kx + l$ вместо x число 0, то получим, что $y = l$.

На рисунке 4.20 построено несколько прямых, каждая из которых задаётся уравнением вида $y = kx + 2$. Все они проходят через точку $(0; 2)$, лежащую на оси y . Получается пучок прямых, пересекающихся в точке $(0; 2)$.

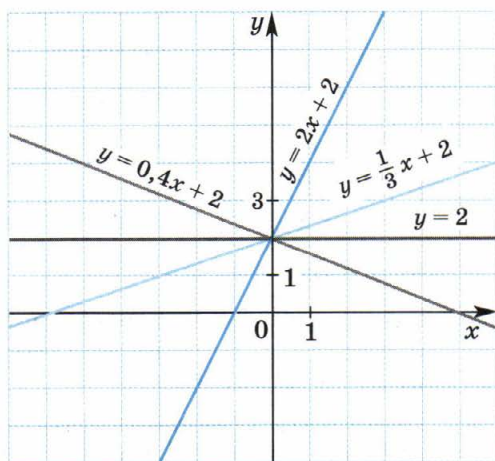


Рис. 4.20

- Прямая задана уравнением вида $y = kx + l$. Назовите коэффициенты k и l :
 а) $y = 7x - 4$; в) $y = -x - 1$; д) $y = -0,1x$;
 б) $y = 6 - \frac{x}{2}$; г) $y = -5 + x$; е) $y = \frac{2x}{3}$.
- Уравнение какой прямой нельзя записать в виде $y = kx + l$: горизонтальной, вертикальной или наклонной?
- Объясните, почему прямая, которая задаётся уравнением вида $y = kx$, проходит через начало координат. Приведите пример уравнений двух прямых, одна из которых проходит через начало координат, а другая нет.
- Покажите на рисунке, как расположена в координатной плоскости прямая $y = kx$ при $k > 0$ и при $k < 0$.
- Не выполняя построение по точкам, покажите схематически, как в координатной плоскости располагаются по отношению друг к другу прямые $y = 1,3x$ и $y = 5,7x$.
- Две прямые заданы уравнениями вида $y = kx + l$. Как узнать, параллельны они или пересекаются? Приведите пример уравнений двух пересекающихся прямых и двух параллельных прямых. Как называется коэффициент k в уравнении $y = kx + l$?
- Каков геометрический смысл коэффициента l в уравнении $y = kx + l$? Проиллюстрируйте свой ответ на примере прямой $y = x + 3$.
- Покажите на рисунке, как располагается в координатной плоскости прямая, заданная уравнением $y = kx + l$, где $k > 0$ и $l > 0$.

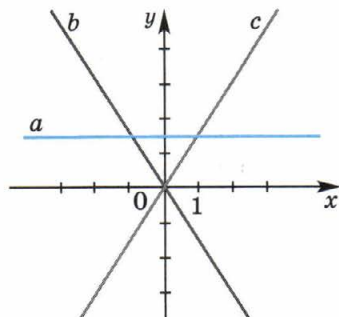
А

Запишите уравнение прямой в виде $y = kx + l$ и назовите коэффициенты k и l (607—608).

- 607** а) $x + y = 5$; в) $3x - 2y = 6$;
 б) $2x + y = -3$; г) $10x + 100y = 200$.
- 608** а) $3y - 2x = 0$; б) $2y + 4 = 0$; в) $3y - 9 = 0$; г) $2x = 3y$.
- 609** ■ **ДЕЙСТВУЕМ ПО АЛГОРИТМУ** ■ Постройте прямую, заданную уравнением:
- а) $y = \frac{1}{2}x$; в) $y = -2x$; д) $y = \frac{x}{3}$;
 б) $y = 3x$; г) $y = -0,5x$; е) $y = -\frac{x}{4}$.
- 610** Запишите уравнение прямой $y = kx + l$ при указанных k и l и постройте эту прямую, если:
 а) $k = 1, l = 0$; б) $k = -1, l = 0$; в) $k = 0, l = 1$; г) $k = 0, l = -1$.
- 611** Выпишите уравнения, графиками которых являются прямые, проходящие через начало координат, и постройте эти прямые:

$$y = 3x^2, \quad y = \frac{x}{4}, \quad y = 4x - 1, \quad y = \frac{2}{x}, \quad y = -3x, \quad y = -5.$$

- 612** ■ АНАЛИЗИРУЕМ И РАССУЖДАЕМ ■ На рисунке 4.21 изображены прямые a , b и c с угловыми коэффициентами $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}$ и 0 . Назовите угловым коэффициентом каждой из прямых.



■ Рис. 4.21

- 613** Покажите схематически, как в координатной плоскости расположен график уравнения:

а) $y = 10x$; в) $y = 0,3x$;
б) $y = -8x$; г) $y = -1,2x$.

- 614** Прямые заданы уравнениями

$$y = \frac{1}{2}x + 1, \quad y = \frac{1}{2}x - 4, \quad y = \frac{1}{2}x.$$

- 1) Чему равен угловой коэффициент каждой прямой?
- 2) Каково взаимное расположение этих прямых на плоскости?
- 3) В какой точке каждая прямая пересекает ось y ?
- 4) Постройте эти прямые.

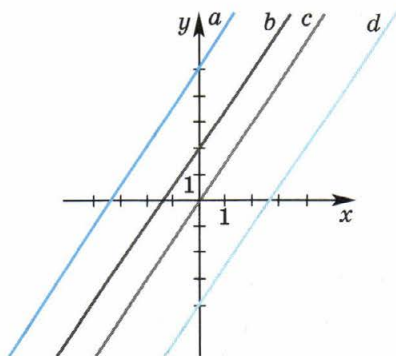
- 615** В одной системе координат постройте прямые, заданные уравнениями вида $y = kx + l$ с одним и тем же угловым коэффициентом $-\frac{2}{3}$ и коэффициентом l , равным 0 ; 1 ; 3 ; -2 ; -6 .

■ АНАЛИЗИРУЕМ И РАССУЖДАЕМ (616–617) ■

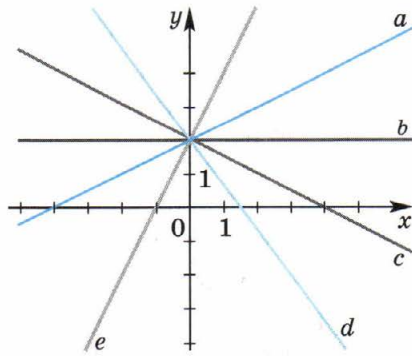
- 616** На рисунке 4.22 изображены прямые a , b , c и d . Соотнесите каждую из них с одним из следующих уравнений:

$$y = \frac{3}{2}x, \quad y = \frac{3}{2}x + 5, \quad y = \frac{3}{2}x + 2, \quad y = \frac{3}{2}x - 4.$$

- 617** На рисунке 4.23 изображены прямые a , b , c , d , e . У каких из них угловой коэффициент положителен? отрицателен? равен 0 ?



■ Рис. 4.22



■ Рис. 4.23

Для каждой прямой назовите угловой коэффициент и ординату точки, в которой прямая пересекает ось y , и постройте эту прямую (618–619).

- 618 а) $y = x + 2$; в) $y = 2x - 4$; д) $y = 0,5x - 3$;
 б) $y = x - 1$; г) $y = \frac{2}{3}x + 2$; е) $y = \frac{x}{2} + 1$.
 619 а) $y = -x + 3$; в) $y = -2x + 2$; д) $y = -0,4x - 2$;
 б) $y = -x - 1$; г) $y = 4 - \frac{1}{2}x$; е) $y = 6 - 3x$.

620 Запишите уравнение прямой, если известен её угловой коэффициент и точка, в которой прямая пересекает ось y , и постройте эту прямую:

- а) $k = 3$, $A(0; -3)$; в) $k = \frac{2}{5}$, $A(0; 0)$;
 б) $k = -2$, $A(0; 1)$; г) $k = 0$, $A(0; -4)$.

621 Найдите координаты точек, в которых прямая пересекает ось x и ось y , и постройте эту прямую:

- а) $y = 2x - 10$; б) $y = -\frac{2}{3}x + 4$; в) $y = 4x + 2$; г) $y = -\frac{1}{2}x - 1$.

■ АНАЛИЗИРУЕМ И РАССУЖДАЕМ (622–623)

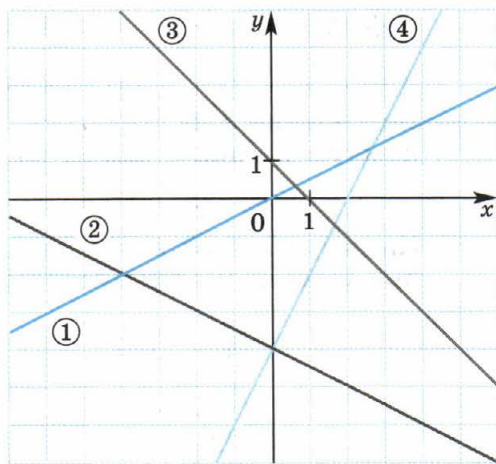
622 На рисунке 4.24 изображены следующие прямые:

$$y = \frac{1}{2}x, \quad y = 2x - 4,$$

$$y = -x + 1, \quad y = -\frac{1}{2}x - 4.$$

Соотнесите прямые с уравнениями.

623 Ученик допустил ошибки при построении прямых $y = 3x$, $y = \frac{1}{2}x + 2$, $y = 2x - 1$, $y = 3 - x$ (рис. 4.25). В каждом случае объясните, почему можно сразу увидеть, что прямая построена неверно.



■ Рис. 4.24

624 Даны уравнения прямых:

$$y = x - 4, \quad y = -x - 4, \quad y = 2x - 4, \quad y = -\frac{1}{2}x - 4.$$

- 1) Есть ли среди данных прямых параллельные прямые?
- 2) В какой точке каждая прямая пересекает ось y ?
- 3) Постройте эти прямые.

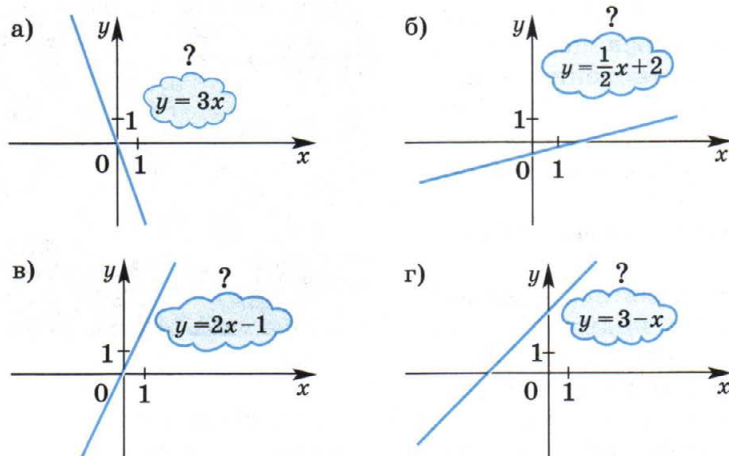


Рис. 4.25

625 ■ АНАЛИЗИРУЕМ И РАССУЖДАЕМ

На рисунке 4.26 изображены прямые a , b , c и d . Соотнесите каждую из них с одним из уравнений:

$$y = 2x + 2, \quad y = -2x + 2,$$

$$y = \frac{1}{3}x + 2, \quad y = -\frac{1}{3}x + 2.$$

626 Определите, пересекаются ли данные прямые; если пересекаются, то постройте эти прямые и найдите координаты точки пересечения; проверьте результат, подставив найденные координаты в уравнения:

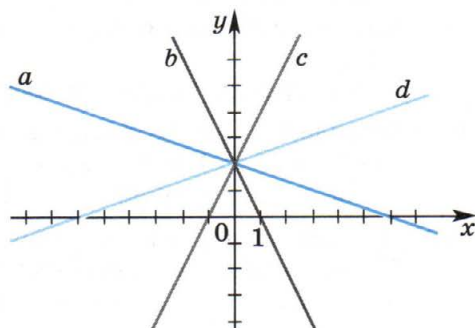


Рис. 4.26

а) $y = 2x - 5$ и $y = 2x + 5$; в) $y = -\frac{1}{2}x + 3$ и $y = x - 3$;

б) $y = -x + 1$ и $y = 3x + 9$; г) $y = -\frac{1}{3}x + 1$ и $y = -\frac{1}{3}x + 3$.

Б

627 а) Парусная лодка в некоторый момент времени находится в 20 км от наблюдателя и движется в направлении к нему со скоростью 9 км/ч.

1) Обозначьте расстояние между лодкой и наблюдателем (в километрах) буквой y , а время движения лодки (в часах)

буквой x и составьте уравнение, связывающее y и x . Определите значение y при $x = 2$, $x = -1$, $x = 3$. Прокомментируйте в соответствии с условием задачи каждый ответ.

2) Постройте график уравнения.

б) После сильных дождей вода в реке поднялась над обычным уровнем на 1,5 м. Через некоторое время уровень начал снижаться в среднем на 20 см в час.

1) Обозначьте высоту воды над обычным уровнем (в метрах) буквой y , а время снижения уровня воды (в часах) буквой x и составьте уравнение, связывающее y и x . Определите, на какой высоте над обычным уровнем окажется вода через 4 ч после начала снижения; через какое время вода достигнет обычного уровня.

2) Постройте график уравнения.

628 Определите, параллельны или пересекаются прямые:

а) $x - 2y = 14$ и $x + 2y = 3$;

б) $6x + 2y = 3$ и $3x + y = 1$.

629 Запишите уравнение прямой, пересекающей ось y в точке $(0; 5)$ и параллельной прямой:

а) $y = 2x - 1$; б) $y = -7x + 4$; в) $2x - 3y = 0$.

630 Запишите уравнение прямой, параллельной прямой $y = -\frac{3}{4}x + 2$ и проходящей через точку:

а) $(0; -2)$; б) $(0; 100)$; в) $(0; 0)$.

631 На рисунке 4.27, а—в изображена прямая, заданная уравнением вида $y = kx + l$. Определите знаки коэффициентов k и l .

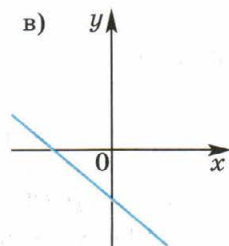
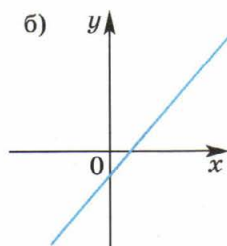
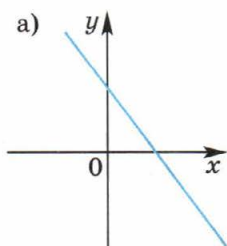


Рис. 4.27

632 Постройте график уравнения:

а) $|x| + |y| = 1$; б) $|x| - |y| = 1$.

Указание. Рассмотрите график уравнения отдельно в каждой координатной четверти.

4.4 Системы уравнений. Решение систем способом сложения

1 Пусть две прямые заданы своими уравнениями $2x - 3y = 3$ и $4x + 3y = 18$. Эти прямые пересекаются. Каковы координаты их точки пересечения?

Построим прямые в одной и той же системе координат (рис. 4.28). Обозначим точку пересечения буквой M . Из рисунка видно, что координаты точки M — числа дробные, и по чертежу их можно найти только приближённо. Если же нас интересуют точные координаты этой точки, то их придётся *вычислить*. Это можно сделать, используя уравнения прямых.

Точка M принадлежит сразу двум прямым, поэтому её координаты должны удовлетворять одновременно двум уравнениям. Таким образом, наша задача теперь состоит в том, чтобы найти общее решение уравнений $2x - 3y = 3$ и $4x + 3y = 18$.

В тех случаях, когда нужно найти общие решения двух или более уравнений, говорят, что требуется *решить систему уравнений*. Так, в данном случае мы должны решить систему двух линейных уравнений $2x - 3y = 3$ и $4x + 3y = 18$. Тот факт, что уравнения рассматриваются как система, символически обозначают с помощью фигурной скобки:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x + 3y = 18. \end{cases}$$

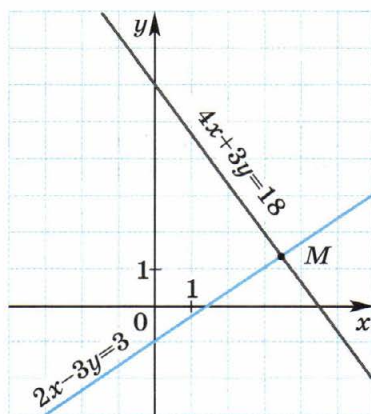


Рис. 4.28

Пару чисел, которая является решением каждого из уравнений, входящих в систему, называют решением системы.

Решить систему уравнений — это значит найти все её решения или убедиться в том, что их нет.

2 Из геометрических соображений мы уже знаем, что система уравнений $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x + 3y = 18 \end{cases}$ имеет единственное решение. Чтобы най-

ти его, поступим следующим образом. Сложим левые и правые части уравнений. (При этом мы воспользуемся очевидным свойством числовых равенств: если $a = b$ и $c = d$, то $a + c = b + d$.) Так как коэффициенты при переменной y — противоположные числа, то при сложении y исчезнет, и получится уравнение с одной переменной:

$$\begin{array}{r} 2x - 3y = 3 \\ + \quad 4x + 3y = 18 \\ \hline 6x = 21. \end{array}$$

Из полученного уравнения найдём x : $x = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$.

Подставив это значение x в любое из уравнений системы, например в уравнение $2x - 3y = 3$, найдём y :

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{7}{2} - 3y &= 3, \\ -3y &= -4, \\ y &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Таким образом, решение системы есть пара чисел $x = 3\frac{1}{2}$, $y = 1\frac{1}{3}$. Эта пара и является координатами точки пересечения прямых $2x - 3y = 3$ и $4x + 3y = 18$.

Обратите внимание: находя координаты точки пересечения прямых, мы перевели задачу с геометрического языка на алгебраический. Возможность формулировать одни и те же утверждения и на геометрическом, и на алгебраическом языках даёт нам система координат, изобретение которой, как вы уже знаете, принадлежит Рене Декарту. Преимуществом геометрического языка является его наглядность. Зато алгебраический язык позволяет сводить задачу к вычислениям. В силу этого обстоятельства он более приспособлен для передачи функций человека компьютеру.



Рене Декарт (1596–1662),
французский философ
и математик,
физик и физиолог

При решении системы, рассмотренной выше, мы воспользовались так называемым *способом сложения*. Он основан на следующем утверждении:

Любое уравнение системы можно заменить уравнением, полученным путём сложения (или вычитания) левых и правых частей уравнений, входящих в систему; при этом получается система уравнений, имеющая те же решения, что и исходная.

Так, решая систему

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x + 3y = 18, \end{cases}$$

мы заменили её системой

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 6x = 21, \end{cases}$$

в которой второе уравнение получено в результате сложения исходных уравнений.

Приведём ещё примеры решения систем двух линейных уравнений с двумя переменными способом сложения.

Пример 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 5x + 4y = -7 \\ 5x - 6y = 23. \end{cases}$$

Коэффициенты при переменной x одинаковы. Поэтому умножим второе уравнение системы на -1 . Получим систему

$$\begin{cases} 5x + 4y = -7 \\ -5x + 6y = 23. \end{cases}$$

Далее будем действовать, как в примере, рассмотренном выше: сложим левые и правые части уравнений. Это позволит исключить переменную x и получить уравнение, в котором содержится только переменная y :

$$10y = -30.$$

Отсюда найдём, что $y = -3$. Подставив это значение y в первое уравнение системы, найдём x :

$$\begin{aligned} 5x + 4 \cdot (-3) &= -7, \\ 5x &= 5, \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Ответ. $x = 1$, $y = -3$.

Заметим, что ответ можно записать иначе: в виде пары $(1; -3)$

или в виде системы $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3. \end{cases}$

При решении системы двух уравнений с двумя переменными способом сложения поступают следующим образом:

- преобразовывают входящие в систему уравнения так, чтобы коэффициенты при какой-либо переменной стали противоположными числами;
- складывают левые и правые части уравнений;
- решают получившееся уравнение с одной переменной;
- находят соответствующие значения другой переменной.

Пример 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - 3y = -16 \\ 6x + 5y = 14. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение системы на 5, а второе — на 3; тогда коэффициенты при y станут противоположными числами. Получим систему

$$\begin{cases} 20x - 15y = -80 \\ 18x + 15y = 42. \end{cases}$$

Сложим левые и правые части уравнений. Получим уравнение

$$38x = -38.$$

Из этого уравнения найдём x :

$$x = -1.$$

Из уравнения $4x - 3y = -16$ найдём y :

$$\begin{aligned} 4 \cdot (-1) - 3y &= -16, \\ -3y &= -12, \\ y &= 4. \end{aligned}$$

Заметим, что найти y можно было бы иначе, исключив путём сложения уравнений переменную x .

Ответ. $x = -1$, $y = 4$.

Э До сих пор мы рассматривали системы двух линейных уравнений с двумя переменными, имеющие единственное решение. Геометрической интерпретацией каждой из этих систем является пара пересекающихся прямых.

Однако две прямые могут оказаться параллельными или даже совпасть. Поэтому при решении систем линейных уравнений возможны и другие случаи. Такие случаи рассмотрены в примерах 3 и 4.

Пример 3. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ 3x - 2y = 5. \end{cases}$$

Сразу видно, что эта система решений не имеет. В самом деле, левые части входящих в неё уравнений одинаковы, а правые — различны. Поэтому не существует таких значений x и y , которые удовлетворяли бы одновременно и первому, и второму уравнениям системы. Если бы мы, как и в предыдущих примерах, решали систему способом сложения, то получили бы неверное числовое равенство: $0 = 4$. Это означало бы то же самое: система решений не имеет.

На рисунке 4.29 проведённые рассуждения проиллюстрированы графически. Прямые $3x - 2y = 9$ и $3x - 2y = 5$ — графики уравнений системы — параллельны; нет ни одной точки, принадлежащей и графику первого, и графику второго уравнения.

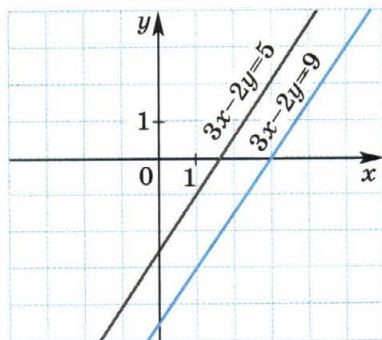


Рис. 4.29

Пример 4. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

Разделив обе части первого уравнения на 2, получим следующую систему:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

Она состоит из двух одинаковых уравнений. С геометрической точки зрения это совпадающие прямые (рис. 4.30). Решениями этой системы служат решения уравнения $2x - y = 3$, а значит, она имеет бесконечное множество решений. Записать множество решений системы можно в виде пары $(x; 2x - 3)$ или так: x — любое число, $y = 2x - 3$.

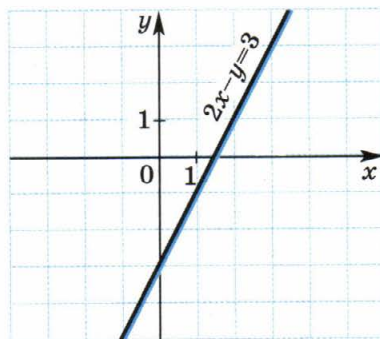


Рис. 4.30

Ответ. x — любое число, $y = 2x - 3$.

- Что называется решением системы уравнений с двумя переменными? Какая из пар: $(5; -1)$ или $(10; 2)$ — является решением системы $\begin{cases} 2x - 5y = 10 \\ x - 6y = -2? \end{cases}$

- а) Убедитесь, что пара $(6; -8)$ является решением системы уравнений $\begin{cases} x + y = -2 \\ x - 2y = 22. \end{cases}$ Дайте геометрическое истолкование этого факта, используя термин «точка пересечения прямых».

б) Убедитесь, что точка $(3; 0)$ принадлежит каждой из прямых $2x - 3y = 6$ и $3x - 2y = 9$. Дайте алгебраическое истолкование этого факта, используя термин «решение системы».

- Как решают систему двух уравнений с двумя переменными способом сложения? Какими могут быть первые шаги в решении систем

$$\begin{cases} 4x + y = -2 \\ 3x - y = -1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 2x - 5y = 20 \end{cases}$$

- Какие вы можете предложить способы решения задачи: «Определите координаты точки пересечения прямых $x + 2y = 8$ и $x - y = 4$ »? Решите задачу каждым из них. Одинаковы ли полученные результаты?
- Сколько решений может иметь система двух линейных уравнений с двумя переменными? Для каждого случая найдите в учебнике соответствующий пример.

A

633 На рисунке 4.31, а–г приведены геометрические иллюстрации систем линейных уравнений. Запишите каждую систему и

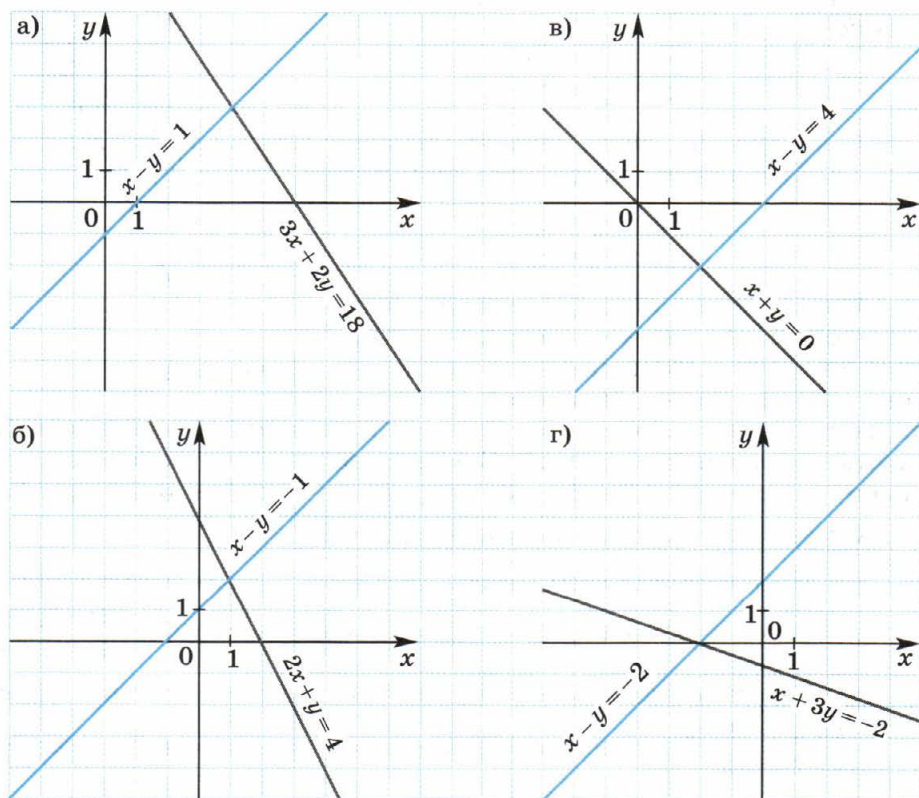


Рис. 4.31

определите с помощью графиков её решение; сделайте проверку, подставив найденные значения x и y в уравнения системы.

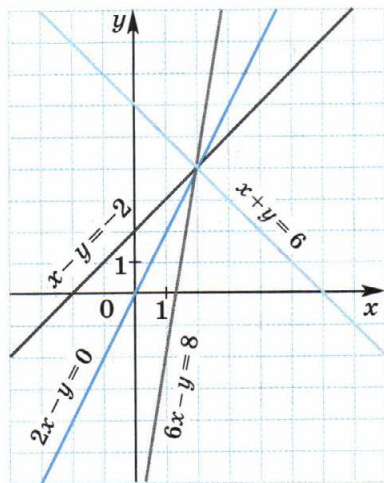


Рис. 4.32

634 На рисунке 4.32 изображены прямые, проходящие через точку $(2; 4)$. Какие системы двух уравнений с двумя переменными, имеющие решением пару чисел $(2; 4)$, можно составить по этому рисунку? Запишите их все.

635 Является ли пара чисел $(2; 8)$ решением системы уравнений:

- а) $\begin{cases} 10x - y = 12 \\ x - y = 6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x + y = 14 \\ x + 2y = 18? \end{cases}$
 б) $\begin{cases} 7x - 2y = -2 \\ y - x = 6; \end{cases}$

ДЕЙСТВУЕМ ПО АЛГОРИТМУ (636–637)

636 Решите систему уравнений:

- а) $\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x - 2y = 0,1 \\ -5x - 4y = 0,5; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x + 2y = -25 \\ 3x + 2y = -5; \end{cases}$
 б) $\begin{cases} x + 3y = 18 \\ 2x - 3y = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + y = 5,4 \\ x + y = 6,4; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 5x - 3y = 11. \end{cases}$

637 Решите систему уравнений двумя способами, исключив в первом случае одну переменную, а во втором — другую:

- а) $\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ 9x + 4y = 40; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a + b = 5 \\ 3a - 5b = -1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} p - 4q = 2 \\ 3p - 2q = 16. \end{cases}$

638 а) Найдите два числа, сумма которых равна -1 , а разность равна 5 .

б) Найдите два числа, если известно, что их сумма равна 283 и одно из них на 75 больше другого.

Решите систему уравнений (639–640).

- 639** а) $\begin{cases} 2x - 5y = 0 \\ 6x + y = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3a - 2b = 5 \\ a - 4b = 6; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 6m - 9n = -4 \\ 2m + 5n = 4; \end{cases}$
 б) $\begin{cases} 5x + y = 30 \\ 3x - 4y = 41; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3u - 4v = 2 \\ 9u - 5v = 7; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 5y + 8z = 21 \\ 10y - 3z = -15. \end{cases}$

640 а) $\begin{cases} 3a + 5b = 4 \\ 2a - 3b = 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 6u - 7v = 6 \\ 7u - 8v = 15; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 4y - 2z = 10 \\ 3y + 5z = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x + 3z = 6 \\ 3x + 5z = 8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2m + 5n = 12 \\ 4m + 3n = 10; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 8x - 3y = 22 \\ 3x + 4y = -2. \end{cases}$

641 ■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ ■ Найдите координаты точки пересечения прямых:

а) $8x + y = 27$ и $5x - y = 25$;
 б) $3x - y = 19$ и $x - y = -1$;
 в) $x + y = 2$ и $4x - 7y = -10$;
 г) $2x - y = 3$ и $4x + 3y = -15$.

Б

642 ■ АНАЛИЗИРУЕМ И РАССУЖДАЕМ ■ Объясните, почему данная система не имеет решений или имеет бесчисленное множество решений (в этом случае приведите примеры решений системы):

а) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y - x = 5 \\ 2y - 2x = 10; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x - 3y = 6 \\ 3x - 9y = -9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x - 2y = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 6x + 2y = 12; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ x + 0,5y = 0,5. \end{cases}$

В каждом случае проиллюстрируйте ваш вывод графически.

643 Используя графические соображения, установите, какая из данных систем уравнений имеет единственное решение.

1) $\begin{cases} 2x - y = 8 \\ y - 2x = -8 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - 2y = 8 \\ y - x = 8 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 2y = 8 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$

644 Известно, что одно из двух уравнений системы — это уравнение $y = 0,5x - 3$, а вторым уравнением может быть любое уравнение из следующих:

$$2y - x = 0, \quad x + 2y = 0, \quad x - 2y = 6, \quad 4y - 2x = 6, \\ 4y + 2x = 6, \quad 2y - x + 6 = 0.$$

Используя графические представления, установите в каждом случае, имеет ли система решения, и если имеет, то сколько — одно или бесчисленное множество.

Решите систему уравнений (645—646).

$$645 \quad \text{а) } \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 2 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 5; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2p - \frac{q}{2} = 14 \\ \frac{p}{2} + \frac{q}{8} = 7; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{u}{5} + \frac{v}{2} = 2 \\ -\frac{u}{3} + \frac{v}{2} = \frac{2}{3}; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} \frac{3m}{2} + \frac{2n}{3} = 6 \\ \frac{3m}{4} + \frac{n}{3} = 12. \end{cases}$$

$$646 \quad \text{а) } \begin{cases} 7(x+y) = 28 \\ 3(x-y) = 33; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 0,6(m-n) = 4,2 \\ 0,3(m+n) = 1,5; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{1}{3}(a-b) = 5 \\ \frac{1}{5}(a+b) = 2; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} \frac{2}{3}(u+v) = \frac{4}{3} \\ \frac{3}{4}(u-v) = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

647 ■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ ■ Найдите расстояние от точки пересечения прямых $5x - 5y = -1$ и $5x + 5y = 7$ до оси x , оси y , начала координат.

648 ■ ИССЛЕДУЕМ ■ 1) Убедитесь в том, что графической моделью каждой из данных систем являются совпадающие прямые:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + 8y = 10 \\ 5x + 20y = 25; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 4x - 12y = 40 \\ 5x - 15y = 50. \end{cases}$$

Сравните в каждой системе отношения коэффициентов при x , коэффициентов при y и свободных членов. Сформулируйте признак, по которому можно определить, что система имеет бесконечно много решений.

2) Убедитесь в том, что графической моделью каждой из данных систем являются параллельные прямые:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x + 6y = -3 \\ 4x + 8y = 2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 6x + 2y = 1 \\ 9x + 3y = 9. \end{cases}$$

Сравните в каждой системе отношения коэффициентов при x , коэффициентов при y и свободных членов. Сформулируйте признак, по которому можно определить, что система не имеет решений.

3) Дано уравнение $5x + y = 8$. Составьте ещё одно уравнение так, чтобы вместе с данным оно образовало систему:

- а) имеющую бесконечно много решений;
б) не имеющую решений.

4) Существует ли такое значение a , при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 3y = 6 \\ 2x + y = 18 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений? не имеет решений? Если существует, то укажите его.

4.5 Решение систем уравнений способом подстановки

1 Пусть требуется решить систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = -1 \\ 3y - 5x = 2. \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы легко выразить y через x :
 $y = 2x - 1$.

Подставим во второе уравнение системы вместо y выражение $2x - 1$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 3(2x - 1) - 5x = 2. \end{cases}$$

Теперь второе уравнение системы содержит только одну переменную. Решим его:

$$\begin{aligned} 6x - 3 - 5x &= 2, \\ x &= 5. \end{aligned}$$

Подставив в уравнение $y = 2x - 1$ вместо x число 5, найдём y :

$$\begin{aligned} y &= 2 \cdot 5 - 1, \\ y &= 9. \end{aligned}$$

Таким образом, решением данной системы является пара чисел:
 $x = 5$, $y = 9$.

Ответ. (5; 9).

Способ, которым мы воспользовались для решения системы, называется *способом подстановки*.

При решении систем уравнений способом подстановки поступают следующим образом:

- выражают из какого-либо уравнения системы одну переменную через другую;
- подставляют полученное выражение в другое уравнение системы;
- решают получившееся уравнение с одной переменной;
- находят соответствующие значения другой переменной.

2 Теперь, когда вам известны два алгебраических способа решения систем уравнений, в каждом конкретном случае нужно думать о том, какой из них предпочтительнее. Например, систему уравнений $\begin{cases} 6x - 5y = -2 \\ 4x - 9y = -24 \end{cases}$ лучше решать способом сложения, так как при выражении одной переменной через другую получатся дроби. А система уравнений $\begin{cases} x - 2y = -9 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$ достаточно просто решается любым из рассмотренных приёмов.

Вам придётся решать и более сложные системы, в которых только одно из уравнений линейное. Такие системы решаются, как правило, способом подстановки.

Пример. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y + 2x = 2. \end{cases}$$

Выразим из линейного уравнения переменную y через x :

$$y = 2 - 2x.$$

Выполнив подстановку, получим систему

$$\begin{cases} x^2 + (2 - 2x)^2 = 4 \\ y = 2 - 2x. \end{cases}$$

Решим уравнение с одной переменной:

$$\begin{aligned} x^2 + 4 - 8x + 4x^2 &= 4, \\ 5x^2 - 8x &= 0, \\ x(5x - 8) &= 0, \\ x_1 &= 0, \quad x_2 = 1,6. \end{aligned}$$

Для каждого значения x найдём соответствующее значение y : $y_1 = 2 - 2 \cdot 0 = 2$; $y_2 = 2 - 2 \cdot 1,6 = -1,2$. Таким образом, система имеет два решения: $x_1 = 0$, $y_1 = 2$ и $x_2 = 1,6$, $y_2 = -1,2$.

Ответ. $(0; 2)$, $(1,6; -1,2)$.

3 Обратимся к геометрической интерпретации рассмотренной системы. Для этого сначала выясним, что представляет собой график уравнения $x^2 + y^2 = 4$.

Пусть $M(a; b)$ — произвольная точка графика уравнения $x^2 + y^2 = 4$ (рис. 4.33, а). Это означает, что пара $(a; b)$ — решение уравнения $x^2 + y^2 = 4$, т. е. верно равенство $a^2 + b^2 = 4$.

Найдём расстояние от точки M до начала координат. По теореме Пифагора $OM^2 = a^2 + b^2$. Так как $a^2 + b^2 = 4$, то $OM^2 = 4$ и $OM = 2$.

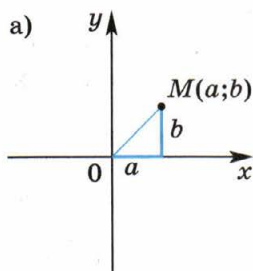


Рис. 4.33

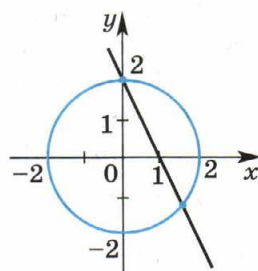
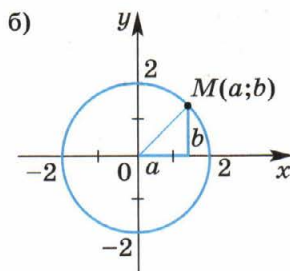


Рис. 4.34

Таким образом, любая точка графика уравнения $x^2 + y^2 = 4$ находится на одном и том же расстоянии, равном 2 единицам, от начала координат. А это означает, что график уравнения $x^2 + y^2 = 4$ есть окружность с центром в начале координат и с радиусом, равным 2 (рис. 4.33, б). Вообще

График уравнения $x^2 + y^2 = r^2$, где r — положительное число, есть окружность с центром в начале координат и радиусом, равным r .

Вернёмся теперь к системе уравнений, которую мы решали. Нанесём в одной и той же системе координат окружность $x^2 + y^2 = 4$ и прямую $y = 2 - 2x$ (рис. 4.34). Они пересекаются в двух точках. Это и есть геометрическое выражение того факта, что рассмотренная система имеет два решения.

- Из каких шагов состоит процесс решения системы способом подстановки? Обозначьте каждый из них в решении системы, рассмотренной во фрагменте 1.
- Какую подстановку вы бы предложили для решения системы:

а) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x - 5y = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 10x - 15y = 91 \\ x - 6y = 10; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x + y = 2? \end{cases}$

В каждом случае запишите первые два шага решения.

- Что представляет собой график уравнения $x^2 + y^2 = 9$? Сделайте рисунок.
- Запишите уравнение окружности с центром в начале координат и с радиусом, равным 4.
- Сделайте схематический рисунок и определите, имеет ли решения система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y = 2x - 1,5, \end{cases}$ и если имеет, то сколько.

- В системе двух уравнений с двумя переменными одно уравнение линейное, а другое — уравнение окружности с центром в начале координат. Сколько решений может иметь такая система? Проиллюстрируйте свои рассуждения рисунками.

А

649 Выразите из уравнения сначала одну переменную, а затем другую:

а) $x + y = 18$; в) $2p + q = 0$;

б) $a - b = 3$; г) $m - 3n = 1$.

ДЕЙСТВУЕМ ПО АЛГОРИТМУ Решите систему способом подстановки (650—651).

650 а) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ y = 2x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} a = b \\ 2a + 3b = -15; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y + 2z = 14 \\ y = z - 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = y - 1 \\ 2x + y = 13; \end{cases}$ г) $\begin{cases} m - 2n = 1 \\ m = -3n + 6; \end{cases}$ е) $\begin{cases} q = p - 2 \\ 7q - 4p = 10. \end{cases}$

651 а) $\begin{cases} y + x = 21 \\ y - x = 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x + 4y = 10; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 3u + 5v = 8 \\ u + 2v = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} a - 2b = 3 \\ a - 3b = 20; \end{cases}$ г) $\begin{cases} m + 3n = 2 \\ 2m + 3n = 7; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x - 2z = 3 \\ 2x - z = 2. \end{cases}$

652 Решите систему уравнений, применив любой из известных вам способов:

а) $\begin{cases} 3m + 4n = 7 \\ 2m + n = 8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5a + 2b = 15 \\ 8a + 3b = -1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 8x - 2y = 14 \\ 9x + 4y = -3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 5x + y = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5p - 4q = 3 \\ 2p - 3q = 11; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3y - z = 5 \\ 5y + 2z = 12. \end{cases}$

ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ (653—655)

653 Определите координаты точки пересечения данных прямых и укажите, в какой координатной четверти она находится:

а) $y = -8x + 27$ и $y = 5x - 25$; в) $2x - y = 6$ и $12x - 5y = 3$;

б) $y = 3x - 19$ и $y = x + 2$; г) $y + 4x = 0$ и $y = \frac{3}{2}x + 33$.

654 Найдите координаты точек пересечения прямой и окружности, заданных уравнениями, и проиллюстрируйте результат графически:

а) $y = \frac{3}{4}x$ и $x^2 + y^2 = 25$; в) $y = -\frac{2}{3}x$ и $x^2 + y^2 = 13$;

б) $x + y = 6$ и $x^2 + y^2 = 20$; г) $x - y = 0$ и $x^2 + y^2 = 16$.

655 Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} x + y = 12 \\ xy = 32; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} y = x + 2 \\ 4y + x^2 = 8; \end{cases} & \text{д) } \begin{cases} 2x - y^2 = 5 \\ x + y^2 = 16; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} x - y = 4 \\ xy = 12; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} y^2 + 2x - 4y = 0 \\ 2y - x = 2; \end{cases} & \text{е) } \begin{cases} x^2 - 3y = -5 \\ x^2 - y = 1. \end{cases} \end{array}$$

656 Пересекаются ли парабола и прямая? Если да, укажите координаты точек пересечения:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = x^2 \text{ и } x + y = 2; & \text{в) } y + x^2 = 0 \text{ и } y = -2x - 3; \\ \text{б) } y = x^2 \text{ и } x - y = 1; & \text{г) } y - x^2 = 0 \text{ и } y = -x - 5. \end{array}$$

Б

657 Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} \frac{y}{5} + \frac{x+y}{3} = -2 \\ \frac{2x-y}{3} = \frac{3x}{4} + \frac{3}{2}; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = x - y \\ 2(x+y) - 2(x-y) - 3 = 2x + y; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} \frac{2x}{3} = \frac{x+y}{2} - \frac{5}{2} \\ 2x + \frac{3y}{2} = 0; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} 3(x-y) - 2(x+y) = 2x - 2y \\ \frac{x-y}{3} - \frac{x+y}{2} = \frac{x}{6} + 1. \end{cases} \end{array}$$

658 Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{llll} \text{а) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{3}{y} = 7; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{3}{y} = 1 \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{y} = 1; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{4}{x} - \frac{4}{y} = 4; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 10 \\ \frac{1}{2x} - \frac{1}{2y} = 1. \end{cases} \end{array}$$

Указание. Введите замену: $\frac{1}{x} = a$, $\frac{1}{y} = b$. Решив систему с переменными a и b , найдите x и y из равенств $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$.

659 Решите систему способом подстановки:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x = 30z \\ y = 40z \\ x + y = 210; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} a = c + 1 \\ b = 2c - 1 \\ a - b = 3; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} m = 4p \\ n = -5p \\ m + 4n = 40; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} s = 2v - 3 \\ u = v - 5 \\ 2s - 3u = 10. \end{cases} \end{array}$$

660 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y = -2 \\ y + z = 4 \\ z + x = 2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z + u = 5 \\ z + u + x = 6 \\ u + x + y = 1. \end{cases}$$

Указание. а) Сложите все уравнения системы и в полученное уравнение подставьте поочерёдно значения $x + y$, $y + z$ и $z + x$.

661 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x + z = 3 \\ y + z = 1 \\ x + y = 2; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ x - y - z = 9; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x - y = 3y \\ z - 2y = y \\ x - z = 5; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x + y - z = 18 \\ x - y = 10 \\ y - z = 6. \end{cases}$$

662 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 + 2x + y^2 = 16 \\ x + y = 2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0 \\ x + 2y = 3. \end{cases}$$

663 ■ РАССУЖДАЕМ ■ Найдите все пары натуральных чисел, удовлетворяющие уравнению:

$$\text{а) } x^2 - y^2 = 64; \quad \text{б) } x^2 - y^2 = 15; \quad \text{в) } x^2 - y^2 = 44.$$

Указание. а) Разложите на множители левую часть уравнения, получится уравнение $(x - y)(x + y) = 64$. Числа $x - y$ и $x + y$ — натуральные, причём их произведение равно 64. Найдите все пары натуральных чисел, дающих в произведении 64, и составьте соответствующие системы уравнений. Чтобы не выписывать лишние системы уравнений, можно учесть, что $x > y$, а $x - y < x + y$.

4.6 Решение задач с помощью систем уравнений

■ Вспомните, как в рассказе А. П. Чехова «Репетитор» гимназист, давая урок двенадцатилетнему Пете Удодову, предложил ему решить такую задачу: «Купец купил 138 аршин чёрного и синего сукна за 540 рублей. Спрашивается, сколько аршин он купил того и другого, если синее стоило 5 рублей за аршин, а чёрное 3 рубля».

Тот, кто читал этот рассказ, знает, что учитель запутался, пытаясь решить задачу арифметическим путём. А отец Пети решил её очень быстро, на русских счётах. Возможно, он рассуждал так:

$3 \cdot 138 = 414$ (р.) — столько купец заплатил бы за сукно, если бы всё оно было по 3 р. за аршин;

$540 - 414 = 126$ (р.) — такая разница получилась, так как часть сукна купец купил по 5 р. за аршин, т. е. на 2 р. дороже;

$126 : 2 = 63$ (арш.) — столько купец купил синего сукна;

$138 - 63 = 75$ (арш.) — столько купец купил чёрного сукна.

Горе-репетитор, оправдываясь, заявил: «Эта задача, собственно говоря, алгебраическая. Её с иксом и игрёком решить можно». Решим и мы эту задачу, составив по её условию систему уравнений. Для этого введём две переменные.

Пусть купец купил x аршин синего сукна и y аршин чёрного. Так как всего было куплено 138 аршин, то $x + y = 138$.

Теперь составим второе уравнение: за синее сукно купец заплатил $5x$ рублей, а за чёрное — $3y$ рублей, всего купец заплатил 540 рублей, поэтому $5x + 3y = 540$.

Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 138 \\ 5x + 3y = 540. \end{cases}$$

Решим её способом сложения. Умножив первое уравнение на 3, получим систему

$$\begin{cases} 3x + 3y = 414 \\ 5x + 3y = 540. \end{cases}$$

Из второго уравнения вычтем первое. Получим уравнение с переменной x :

$$2x = 126,$$

откуда

$$x = 63.$$

Из уравнения $x + y = 138$ найдём y :

$$y = 138 - 63 = 75.$$

Мы получили уже известный нам ответ: купец купил 63 аршина синего сукна и 75 аршин чёрного.

По условию этой задачи можно было бы составить уравнение с одной переменной. Однако составить систему уравнений с двумя переменными в данном случае значительно проще, и так бывает при решении многих задач.

- 2** Если условие задачи достаточно сложное, то перевод её на алгебраический язык можно упростить введением не одной, а двух или даже большего числа переменных.

Задача. Места на стадионе расположены в три яруса. Всего арена рассчитана на 4280 мест. В нижнем ярусе в 3 раза больше мест, чем в верхнем. В среднем ярусе на 680 мест больше, чем в верхнем. Сколько мест в каждом ярусе?

Пусть x мест — в верхнем ярусе,

y мест — в среднем ярусе,

z мест — в нижнем ярусе.

Составим систему

$$\begin{cases} x + y + z = 4280 \\ z = 3x \\ y = x + 680. \end{cases}$$

Подставив в первое уравнение выражения для z и y из второго и третьего уравнений, получим

$$x + (x + 680) + 3x = 4280.$$

Решив это уравнение, найдём x :

$$x = 720.$$

Используя уравнения системы, найдём y и z :

$$y = 1400, z = 2160.$$

Как вы хорошо знаете, найдя решение, полезно для самопроверки убедиться, что оно отвечает условию задачи. Действительно, $720 + 1400 + 2160 = 4280$.

Ответ. В верхнем ярусе 720 мест, в среднем ярусе 1400 мест, в нижнем ярусе 2160 мест.

□ Разберите алгебраическое решение задачи из рассказа А. П. Чехова «Репетитор» (фрагмент 1).

1) Какие величины обозначены буквами x и y ?

2) Какое буквенное выражение означает стоимость синего сукна? чёрного сукна? их суммарную стоимость?

3) Какое буквенное выражение означает общее количество сукна?

4) Решите составленную систему способом сложения, исключив переменную y .

□ На овощной базе x кг картофеля, y кг моркови и z кг капусты. Дайте истолкование на русском языке следующего уравнения:

а) $x = y + z$; б) $z = 1,5y$; в) $x - y = 120$.

A

664 Составьте систему уравнений по условию задачи:

а) Николай на выполнение домашней работы по математике затратил на 30 мин больше, чем по географии. Всего на эти два предмета он затратил 1 ч 40 мин. Сколько времени потребовалось на каждый предмет?

б) Скорость лодки по течению реки 18 км/ч, а против течения 15 км/ч. Найдите собственную скорость лодки и скорость течения реки.

в) Стоимость карандаша составляет $\frac{2}{3}$ стоимости ручки, причём ручка на 6 р. дороже карандаша. Сколько стоит ручка и сколько карандаш?

г) С июня ежемесячная плата за квартиру увеличится на 6%, и семье придётся платить 901 р. Сколько рублей платит семья за квартиру теперь и на сколько рублей увеличится плата?

Решите задачу (665—680).

665 а) Длина ограды вокруг участка прямоугольной формы равна 140 м. Одна из сторон участка на 50 м больше другой. Найдите размеры участка.

б) Брат и сестра, работая в каникулы на почте, заработали 2300 р. Брат заработал на 400 р. больше сестры. Сколько заработал каждый?

666 а) Группа туристов отправилась в поход на 12 байдарках. Часть байдарок были двухместные, а часть — трёхместные. Сколько двухместных и сколько трёхместных байдарок использовали в походе, если группа состояла из 29 человек и все места были заняты?

б) На теплоходе 17 четырёхместных и шестиместных кают. В них можно перевезти 78 пассажиров. Сколько тех и других кают в отдельности имеется на теплоходе?



667 а) У Вани 25 монет по 5 к. и по 10 к., всего на сумму 1 р. 50 к. Сколько 5-копеечных и сколько 10-копеечных монет у Вани?

б) Для школьного вечера купили 10 коробок печенья по 250 г и по 150 г. Общая масса коробок составила 2,1 кг. Сколько купили коробок печенья каждого вида?

668 а) Два отдела института приобрели писчую бумагу и скрепки. Один отдел за 5 пачек бумаги и 4 коробки скрепок заплатил 1440 р., а другой отдел за 2 такие же пачки бумаги и 2 коробки скрепок заплатил 600 р. Сколько стоит одна пачка бумаги и одна коробка скрепок?

б) В кафе в понедельник было продано 56 пирожков и 20 бутылок воды на 872 р., а во вторник — 50 пирожков и 40 бутылок воды на 1000 р. Определите цену одного пирожка и одной бутылки воды.

669 а) Прибыль компании в этом году выросла на 200 000 р. Это на 25% больше, чем прибыль в прошлом году. Найдите прибыль компании за прошлый год и за этот год.

б) Электрочайник на 60 р. дешевле кофеварки, а кофеварка на 30% дороже электрочайника. Сколько стоит электрочайник и сколько стоит кофеварка?

670 а) Клиент банка внёс 12000 р. на два разных вклада. По одному из них банк выплачивает 8% в год, по другому — 10% в год. Через год внесённая сумма увеличилась на 1080 р. Сколько рублей внёс клиент на каждый из вкладов?

б) В выборах школьного совета участвовало 900 учащихся. За кандидата А проголосовало 15% девочек и 20% мальчиков, всего 159 учащихся. Сколько девочек и сколько мальчиков участвовало в выборах совета?

671 Какая из следующих ситуаций возможна, а какая невозможна?

а) Для двух классов купили одинаковые тетради и шариковые ручки. За 60 тетрадей и 20 ручек для одного класса заплатили 420 р., а за 75 тетрадей и 25 ручек для другого класса заплатили 600 р.

б) В школе 650 учащихся. К концу года число девочек увеличилось на 10%, а число мальчиков — на 20%, и всего стало 750 учащихся.

672 а) Произведение двух чисел равно 84, а их сумма равна 20. Найдите эти числа.

б) Произведение двух положительных чисел равно 120, и одно из них на 7 больше другого. Найдите эти числа.

673 а) В парке под аттракционы отвели участок прямоугольной формы площадью 720 м^2 . Длина ограждения этого участка 108 м. Найдите размеры участка.

б) Площадь газона прямоугольной формы 375 м^2 . Одна из его сторон на 10 м больше другой. Найдите размеры газона.

674 а) Периметр прямоугольника 28 см, а его диагональ равна 10 см. Найдите стороны прямоугольника.

б) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 13 см, а его периметр равен 30 см. Найдите катеты треугольника.

675 Туристский маршрут от станции к озеру идёт сначала в гору, а затем с горы. При подъёме туристы идут со скоростью 3 км/ч, а при спуске — 6 км/ч. Путь от станции к озеру занимает 3,5 ч, а обратный путь — 4 ч. Найдите длину маршрута.

676 Некоторая сумма денег была помещена в банк на два разных вклада: один с доходом 6% в год, а другой — 5% в год. Общий годовой доход составил 510 р. Если внесённые вклады поменять местами, то годовой доход составит 480 р. Какая сумма внесена в банк?

677 Имеется 40 красных фишек и 45 синих. Их раскладывают на плоской поверхности следующим образом: красные фишки образуют вершины правильного шестиугольника, в центр которого кладётся синяя фишка, а синие фишки образуют вершины квадрата, в центр которого кладётся красная фишка (рис. 4.35).

Существует ли такой способ разложения фишек, при котором все они будут использованы? Если существует, то сколько шестиугольников и сколько квадратов получится?

Замечание. Многоугольники не должны иметь общих вершин.

678 В магазине смешали конфеты по 110 р. за килограмм и по 150 р. за килограмм и получили смесь по 120 р. за килограмм. Сколько граммов конфет того и другого сорта содержится в одном килограмме смеси?

679 а) В колбу налили некоторое количество 60%-ного раствора соли и некоторое количество 80%-ного раствора этой же соли. Получили 35 мл раствора, содержащего 72% соли. Сколько миллилитров каждого раствора налили в колбу? Решите задачу, используя следующий план:

- 1) Обозначьте буквами количество 60%-ного и 80%-ного растворов соли, налитых в колбу.
- 2) Запишите уравнение, связывающее эти две величины и общее количество раствора.
- 3) Определите количество соли в получившемся растворе.
- 4) Запишите уравнение, связывающее количество соли в 60%-ном, 80%-ном и получившемся растворах.
- 5) Составьте систему и решите её.

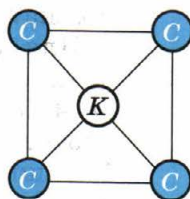
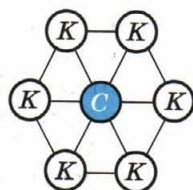


Рис. 4.35

б) Для проведения опыта научный сотрудник химической лаборатории смешал 4%-ный и 10%-ный растворы некоторого химического вещества и получил 75 мл 8%-ного раствора этого вещества. Сколько миллилитров 4%-ного и сколько миллилитров 10%-ного растворов было взято?



- 680** а) Междугородный автобус проехал от одного города до другого за 17 ч. Некоторое время он ехал со скоростью 35 км/ч, а остальную часть пути — со скоростью 55 км/ч. Определите, сколько часов он ехал со скоростью 35 км/ч и сколько со скоростью 55 км/ч, если его средняя скорость была 50 км/ч.
- б) Автомобиль затратил 5 ч на путь от одного города до другого. Часть пути он ехал со скоростью 70 км/ч, а часть пути со скоростью 90 км/ч, и 1 ч был затрачен на остановку. Сколько времени он ехал со скоростью 70 км/ч и сколько со скоростью 90 км/ч, если его средняя скорость была 60 км/ч?

Введите необходимое число переменных и решите задачу (681—683).

- 681** Матери, дочери и бабушке вместе 105 лет. Матери и дочери вместе 45 лет, а бабушке и внучке вместе 70 лет. Сколько лет каждой?

- 682** Города A , B и C расположены не на одной прямой. Путь из A в B через C на 5 км длиннее, чем прямой путь из A в B . Путь из A в C через B в 4 раза длиннее, чем прямой путь из A в C . Путь из B в C через A равен 85 км. Найдите расстояние между каждым двумя городами.



- 683** Салат приготовили из помидоров по 40 р. за килограмм, огурцов по 20 р. за килограмм и перца по 70 р. за килограмм. Получили 8 кг салата по 4 р. за 100 г. Сколько помидоров, огурцов и перца взято для салата, если известно, что масса каждого продукта выражается целым числом килограммов?

4.7 Задачи на координатной плоскости

Вы уже знаете, что с помощью систем уравнений можно определять взаимное расположение прямых на координатной плоскости, находить координаты точки их пересечения. Таким образом, алгебра может работать на геометрию.

С помощью уравнений можно решать и другие задачи, связанные с прямыми на координатной плоскости.

Задача 1. Запишем уравнение прямой, которая параллельна прямой $y = -0,5x + 3$ и проходит через точку $A(4; -1)$.

Так как прямая, уравнение которой мы должны записать, параллельна прямой $y = -0,5x + 3$, то их угловые коэффициенты одинаковы, и искомое уравнение имеет вид $y = -0,5x + l$. Таким образом, задача свелась к нахождению коэффициента l .

Точка $A(4; -1)$ принадлежит прямой $y = -0,5x + l$. Подставив её координаты $x = 4$ и $y = -1$ в уравнение $y = -0,5x + l$, получим

$$-1 = -0,5 \cdot 4 + l.$$

Из этого равенства найдём, что $l = 1$.

Значит, уравнение прямой, параллельной прямой $y = -0,5x + 3$ и проходящей через точку $A(4; -1)$, имеет вид $y = -0,5x + 1$.

Задача 2. Запишем уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1; 2)$ и $B(3; 4)$.

Чтобы записать уравнение прямой AB в виде $y = kx + l$, нужно найти коэффициенты k и l .

Так как точка A лежит на прямой, то её координаты $x = -1$ и $y = 2$ удовлетворяют уравнению $y = kx + l$, т. е. $2 = k \cdot (-1) + l$. Точно так же уравнению $y = kx + l$ удовлетворяют координаты точки B , т. е. $4 = k \cdot 3 + l$.

Таким образом, мы имеем систему уравнений с переменными k и l :

$$\begin{cases} -k + l = 2 \\ 3k + l = 4. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдём, что $k = 0,5$ и $l = 2,5$. Значит, прямая, проходящая через точки $A(-1; 2)$ и $B(3; 4)$, задаётся уравнением $y = 0,5x + 2,5$.

Задача 3. Докажем, что прямые $2x - 3y + 6 = 0$, $y + 2x - 6 = 0$ и $2x + 4y - 15 = 0$ проходят через одну точку.

Поступим следующим образом: найдём точку пересечения каких-либо двух прямых и покажем, что она принадлежит третьей прямой.

Найдём точку пересечения прямых $2x - 3y + 6 = 0$ и $y + 2x - 6 = 0$. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0 \\ y + 2x - 6 = 0. \end{cases}$$

Получим $x = \frac{3}{2}$, $y = 3$.

Подставим найденные координаты точки пересечения прямых в уравнение $2x + 4y - 15 = 0$, получим верное равенство $2 \cdot \frac{3}{2} + 4 \cdot 3 - 15 = 0$. Следовательно, эта точка принадлежит также прямой $2x + 4y - 15 = 0$. Таким образом, данные прямые проходят через одну точку; эта точка имеет координаты $x = 1,5$, $y = 3$.

- Некоторая прямая задана уравнением вида $y = kx + l$. Можно ли что-либо сказать о коэффициентах этого уравнения, если известно, что данная прямая:
 - а) параллельна прямой $y = 3x - 4$;
 - б) пересекает ось y в той же точке, что и прямая $y = 6x - 5$?
- Разберите решение задачи 2.
 - 1) В каком виде мы хотим записать искомое уравнение прямой?
 - 2) Как на алгебраическом языке записывается утверждение: прямая проходит через точку $A(-1; 2)$? прямая проходит через точку $B(3; 4)$?
 - 3) Решите составленную систему двух уравнений с переменными k и l . Какой способ решения вы выбрали?
 - 4) Выполните проверку: убедитесь, что точки $A(-1; 2)$ и $B(3; 4)$ принадлежат прямой, уравнение которой составлено.
- - 1) В чём состоит приём, использованный для решения задачи 3?
 - 2) Решите эту же задачу, вычислив сначала координаты точки пересечения второй и третьей из приведённых прямых.

А

684 Запишите уравнение прямой и постройте её, если известно, что:

- а) угловой коэффициент прямой равен -2 и она проходит через точку $(2; -2)$;
- б) угловой коэффициент прямой равен $0,5$ и она проходит через точку $(-6; -2)$.

685 Запишите уравнение прямой, параллельной данной прямой и проходящей через данную точку A :

- а) $y = 3x$, $A(2; -1)$;
- б) $y = -\frac{1}{2}x + 4$, $A(-6; 5)$.

- 686** Запишите уравнение прямой и постройте эту прямую, если известно, что:
- а) прямая проходит через начало координат и через точку с координатами $(90; 60)$;
 - б) прямая пересекает ось y в точке $(0; -3)$ и проходит через точку $(15; 57)$.

Б

- 687** Запишите уравнение прямой, параллельной данной прямой и проходящей через данную точку A :
- а) $3x + 4y = 12$, $A(8; -8)$;
 - б) $2x - 5y = 1$, $A(5; 7)$.
- 688** Запишите уравнение прямой, которая проходит через две данные точки:
- а) $A(1; 3)$, $B(5; -4)$;
 - б) $A(-1; -1)$, $B(4; 3)$.
- 689** Запишите уравнения прямых, изображённых на рисунке 4.36.

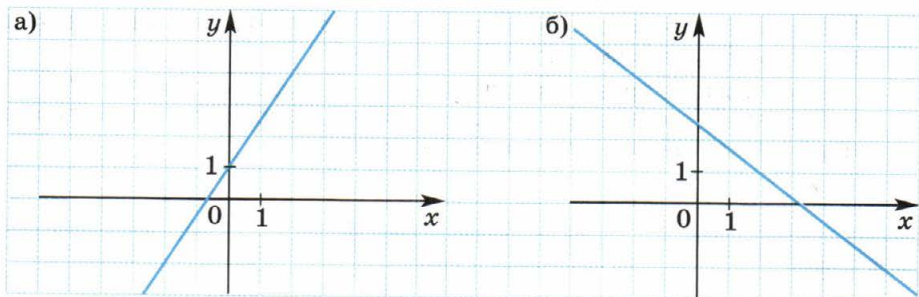


Рис. 4.36

- 690** ■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ ■ а) Найдите координаты точки пересечения прямых $2x + y = 2$ и $x - y = 4$ и определите, проходит ли через эту точку прямая $x + 2y = 6$.
 б) Определите, проходят ли прямые $2x - 3y = 1$, $x + y = 3$ и $3x - y = 5$ через одну точку.
- 691** При каком значении k прямые $y = \frac{1}{2}x - 2$, $y = -2x - 12$, $y = kx$ проходят через одну точку?

■ ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ (692–694) ■

692 Докажите, что точки $(-2; -14)$, $(2; 6)$, $(3; 11)$ лежат на одной прямой.

693 Четыре точки заданы своими координатами: $A(-5; 6)$, $B(7; 2)$, $C(5; 1)$, $D(-4; 4)$. Определите, параллельны ли прямые:
а) AB и CD ; б) BC и AD .

694 Три прямые $y = -\frac{2}{3}x + 2$, $y = 4x + 16$, $y = \frac{6}{5}x + 2$, попарно пересекаясь, образуют треугольник. Найдите координаты его вершин.

695 Постройте прямую $y = -\frac{1}{3}x + 1$. Постройте прямую, симметричную ей относительно: а) оси y ; б) оси x ; в) начала координат. В каждом случае запишите уравнение построенной прямой.

■ ИССЛЕДУЕМ ■

1) В одной системе координат построьте прямые:

а) $y = 3x + 1$ и $y = -\frac{1}{3}x + 1$;

б) $y = -2x + 2$ и $y = \frac{1}{2}x - 3$.

2) Убедитесь, что прямые на каждом из рисунков перпендикулярны. Как связаны между собой угловые коэффициенты каждой пары прямых?

3) Запишите в буквенном виде соотношение, связывающее угловые коэффициенты перпендикулярных прямых $y = k_1x + l_1$ и $y = k_2x + l_2$.

4) Запишите уравнение какой-нибудь прямой, перпендикулярной прямой:

а) $y = -\frac{1}{4}x - 1$;

б) $y = x + 5$.

В каждом случае выполните чертёж.

5) Дана прямая $y = -\frac{3}{2}x + 3$. Запишите уравнение прямой:

а) перпендикулярной данной прямой и проходящей через начало координат;

б) перпендикулярной данной прямой и проходящей через точку $A(9; 2)$;

в) пересекающей данную прямую под прямым углом в точке $M(0; 3)$.

4.8 Геометрическая интерпретация неравенств с двумя переменными

(Для тех, кому интересно)

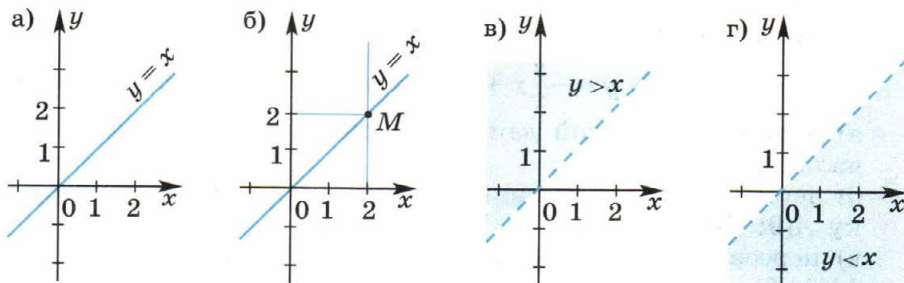
При изучении курса алгебры 7 класса вам уже приходилось строить множества точек координатной плоскости, которые задавались с помощью неравенств. Однако эти неравенства всегда содержали только одну переменную. Теперь мы будем рассматривать множества точек, которые задаются неравенствами, содержащими две переменные.

Пример 1. Вы знаете, что графиком уравнения $y = x$ является прямая — биссектриса I и III координатных углов (рис. 4.37, а). Эта прямая разбивает координатную плоскость на две полуплоскости. Какая из них соответствует неравенству $y > x$?

Возьмём на прямой $y = x$ какую-нибудь точку, например $M(2; 2)$. Понятно, что точки, у которых абсцисса равна 2, а ордината больше 2, лежат на вертикали $x = 2$ выше точки M (рис. 4.37, б). И вообще точки, у которых абсцисса равна некоторому числу a , а ордината больше a , расположены на вертикальной прямой $x = a$ выше точки её пересечения с биссектрисой $y = x$. Таким образом, неравенством $y > x$ задаётся полуплоскость, расположенная над прямой $y = x$ (рис. 4.37, в). Так как неравенство $y > x$ строгое, то сама прямая $y = x$ рассматриваемому множеству не принадлежит. Чтобы показать это, мы провели её пунктирной линией.

Очевидно, что полуплоскость под прямой $y = x$ задаётся неравенством $y < x$ (рис. 4.37, г).

Заметим, что выяснить, какая из двух полуплоскостей задаётся неравенством $y > x$, можно было бы с помощью следующего приёма. Подставим в это неравенство координаты любой точки плоскости, не лежащей на прямой $y = x$, например точки $(4; 0)$, принадлежащей полуплоскости под прямой. Получим неверное неравенство $0 > 4$. Значит, эта точка рассматриваемому множеству не принадлежит и неравенством $y > x$ задаётся другая полуплоскость.



■ Рис. 4.37

Пример 2. Построим множество точек координатной плоскости, которое задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} y < x - 1 \\ y < -x + 3. \end{cases}$$

Неравенством $y < x - 1$ задаётся множество точек, расположенных ниже прямой $y = x - 1$, а неравенством $y < -x + 3$ задаётся множество точек, расположенных ниже прямой $y = -x + 3$. Системе неравенств удовлетворяют координаты точек, принадлежащих сразу двум указанным множествам. Искомое множество точек показано двойной штриховкой на рисунке 4.38.

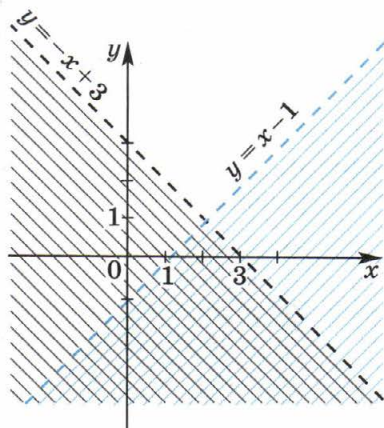


Рис. 4.38

Пример 3. Изобразим на координатной плоскости множество точек, задаваемое системой трёх неравенств

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -\frac{1}{2}x + 2. \end{cases}$$

Первыми двумя неравенствами системы задаётся первый координатный угол. В нём закрасим область, которая расположена ниже прямой $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

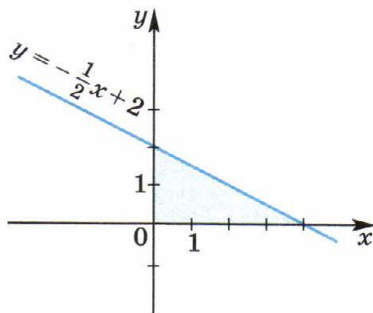


Рис. 4.39

Получили треугольник вместе с его границами (рис. 4.39).

697 Постройте множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $y \geq -x$; б) $y < -x$; в) $y \geq 2x$; г) $y \leq -2x + 4$.

698 Какое множество точек координатной плоскости задаётся неравенством: а) $y \geq x^2$; б) $y \leq x^3$?

699 Постройте множество точек плоскости, которое задаётся системой неравенств:

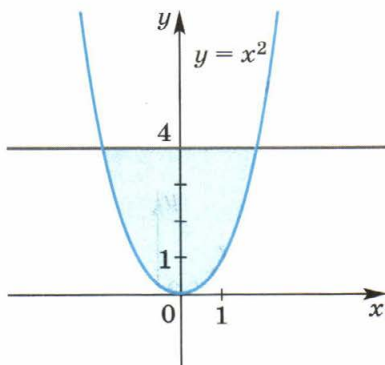
а) $\begin{cases} y \geq \frac{1}{3}x \\ y \leq 6 \\ y \geq 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y \geq x - 1 \\ y \leq x + 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y \geq |x| \\ y \leq 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y \geq -x + 4 \\ y \geq x - 4 \\ y \leq \frac{1}{4}x + 2. \end{cases}$

700 Закрасьте часть координатной плоскости, которая расположена ниже каждой из прямых $x + 3y = 16$ и $2x + y = 12$, ограничена горизонталями $y = 0$ и $y = 5$, а также вертикалями $x = 0$ и $x = 5$. Задайте это множество точек плоскости системой неравенств.

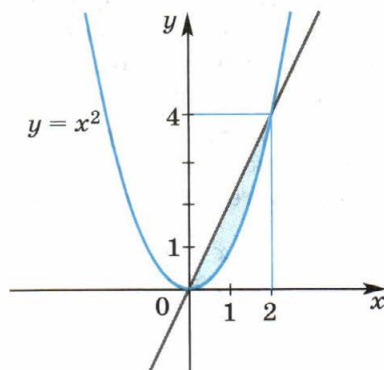
701 Какое множество точек координатной плоскости задаётся условием:

а) $x^2 + y^2 \leq 1$; б) $x^2 + y^2 \geq 9$; в) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$

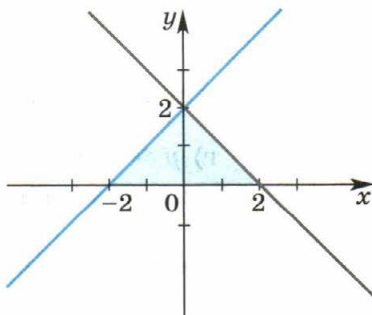
702 Задайте системой неравенств множество точек координатной плоскости, изображённое на рисунках 4.40—4.43.



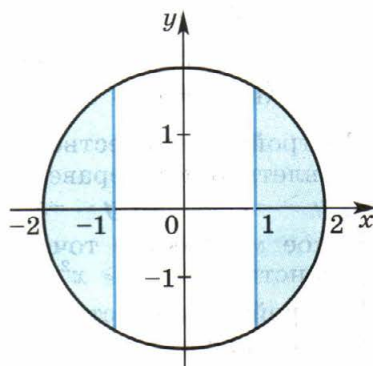
■ Рис. 4.40



■ Рис. 4.41



■ Рис. 4.42



■ Рис. 4.43

Дополнительные задания

Уравнение с двумя переменными.

График уравнения с двумя переменными

- 703** Составьте какое-нибудь уравнение с двумя переменными, решением которого служит пара чисел: а) $(2, 5; -1)$; б) $(-1; 2, 5)$.
- 704** а) При каких значениях a пара чисел $(4; a)$ является решением уравнения $x^2 + y^2 = 25$?
 б) При каких значениях b пара чисел $(b; 4)$ является решением уравнения $2x^2 + y = 12$?
- 705** а) Найдите значение c , при котором пара чисел $\left(-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$ является решением уравнения $2x + 3y = c$.
 б) Найдите значение a , при котором пара чисел $(-3; -2)$ является решением уравнения $ax - 4y = 2$.
- 706** Постройте график уравнения $x + 3y = c$, где x и y — переменные, c — некоторое число, если известно, что он проходит через точку $M(-3; 3)$.
- 707** Постройте график уравнения:
 а) $(x - 2y)(x + 2y) = 0$; в) $(x - 1)(x + 2) = 0$;
 б) $(x + 5)(y - 3) = 0$; г) $(y + 1)(y + 4) = 0$.
- 708** Проходит ли через начало координат график уравнения:
 а) $xy - 1 = 0$; в) $3x - 6y = 2$;
 б) $x^2 + y = 0$; г) $5x + 7y = 0$?
- 709** Окружность задана уравнением $x^2 + y^2 = 9$. Определите, какие из данных точек лежат на этой окружности; внутри окружности; вне окружности: $A(1; 2\sqrt{2})$, $B(-\sqrt{3}; 2)$, $C(2, 5; 2)$, $D(-\sqrt{5}; -2)$, $E(-1; 2, 5)$, $F(2; -\sqrt{6})$.
- 710** а) Можно ли двухрублёвыми и пятирублёвыми монетами заплатить за журнал 37 р. без сдачи? Если можно, то укажите эти способы.
 б) В канцелярском магазине продают простые карандаши в коробках по 8 и по 12 карандашей. Маленькая коробка стоит 70 р., а большая — 90 р. Покупателю требуется ровно 100 простых карандашей. Сколько маленьких и сколько больших коробок ему надо купить, чтобы покупка была максимально выгодной?
- 711** а) Найдите все точки первой четверти с целыми координатами, через которые проходит прямая $x + 2y = 9$.
 б) Найдите все точки второй четверти с целыми координатами, через которые проходит прямая $2y - 3x = 15$.

Системы уравнений

712 Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 17x + 13y = 40 \\ 13x + 17y = 50; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 11x + 35y = 59 \\ 14x - 10y = -34; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 12x - 19y = 10 \\ 18x - 11y = 50; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 16x - 17y = 49 \\ 14x + 47y = -19. \end{cases}$$

Указание. а) Сложите первое и второе уравнения системы; получится уравнение $30x + 30y = 90$, или $x + y = 3$. Затем решите систему $\begin{cases} 17x + 13y = 40 \\ x + y = 3. \end{cases}$

713 Найдите сумму $x + y$, если $(x; y)$ — решение системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 16x + 9y = 30 \\ 9x + 16y = 70; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 12x + 11y = 8 \\ 11x + 12y = 61. \end{cases}$$

714 Найдите сумму $x + y + z$, если:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{x}{12} - \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1 \\ \frac{x}{5} + \frac{z}{10} + \frac{y}{3} = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{x}{6} - \frac{y}{4} - \frac{z}{12} = 5 \\ \frac{x}{8} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 10. \end{cases}$$

Решите задачу (715—718).

715 а) Сестра старше брата на 4 года. Через год она будет старше его в 3 раза. Сколько лет сейчас каждому?

б) Возраст сестры сейчас составляет $\frac{3}{4}$ возраста брата, а 8 лет назад брат был в 2 раза старше сестры. Сколько лет каждому сейчас?

716 а) Школьная баскетбольная команда в двух играх заработала 95 очков. Количество очков, полученных во второй игре, на 5 больше, чем удвоенное количество очков, полученных в первой игре. Сколько очков заработала команда в каждой игре?

б) Для учащихся 8 класса составили работу из заданий по алгебре и геометрии. Если каждое задание по алгебре оценивать в 2 балла, а каждое задание по геометрии — в 3 балла, то максимальное число баллов за работу будет равно 38. Если каждое задание по алгебре оценивать в 3 балла, а каждое задание по геометрии — в 2 балла, то максимальное число баллов за работу будет равно 37. Сколько заданий содержит работа?

- 717** В таблице показано содержание белков и жиров в одной порции мяса и хлеба:

Продукты	Мясо	Хлеб
Белки, г	16	2
Жиры, г	11	1

Сколько порций мяса и хлеба надо съесть за один приём пищи, чтобы получить 26 г белков и 17,5 г жиров?

- 718** Сколько граммов арахиса по цене 12,5 р. за 100 г и сколько граммов лесных орехов по цене 30 р. за 100 г надо смешать, чтобы получить 700 г смеси по цене 20 р. за 100 г?

Решите задачу (719—722).

- 719** Отцу, матери и сыну вместе 70 лет. Отец старше матери на 5 лет, а мать старше сына на 25 лет. Сколько лет каждому?

- 720** Три сосуда вместе имеют вместимость, равную 80 л. Если первый сосуд наполнить водой и затем перелить её в два других сосуда, то либо второй сосуд наполнится доверху, а третий — на $\frac{3}{5}$, либо третий сосуд наполнится доверху, а второй — на $\frac{1}{2}$.

Найдите вместимость каждого сосуда.

- 721** Шесть станций на железнодорожной ветке расположены в следующем порядке: Абрамцево, Белово, Виноградово, Грибово, Дорохово, Ельники. Расстояние от первой до последней станции 70 км. Расстояние между Абрамцево и Белово в 2 раза больше, чем между Белово и Виноградово; расстояние между Грибово и Дорохово в 1,5 раза больше, чем между Белово и Виноградово, и на 2 км меньше, чем между Виноградово и Грибово. Расстояние между Виноградово и Дорохово в 4 раза больше, чем между Дорохово и Ельники. Чему равно расстояние от Абрамцево до Виноградово?

- 722** За 3 майки, 2 пары шорт и 4 пары кроссовок заплатили 2650 р., а за 2 майки, 3 пары шорт и пару кроссовок заплатили 1350 р. Сколько стоит комплект из майки, одной пары шорт и одной пары кроссовок?

Вероятность, статистика, комбинаторика

- 723** В таблице представлены данные о результативности трёх ведущих игроков баскетбольной команды ЦСКА в чемпионате 2011 г.

Фамилия игрока	Сыграно матчей	Броски/попадания		
		2-очковые	3-очковые	штрафные (1 очко)
Н. Крстич	7	70/42	0/0	37/27
А. Кириленко	5	23/13	10/6	31/25
А. Швед	7	44/21	14/7	19/17

Для каждого игрока вычислите следующие показатели:

- частоту попадания в кольцо;
- частоту попадания в кольцо со штрафного броска;
- среднее число бросков в одном матче;
- среднее число очков, набранных в одном матче.

Сравните результативность игроков по каждому из этих показателей.

- 724** В таблице дана информация о грузах, перевезённых железнодорожным транспортом в России в 2005—2009 гг.

Год	2005	2006	2007	2008	2009
Перевезено грузов, млн т	3486,6	3591,7	3775,6	3562,6	3121,3

- Сколько млн тонн грузов перевозилось в среднем за год в этот период?
- В каком году был достигнут наибольший показатель, а в каком — наименьший? Насколько каждый из них отличается от среднего?

- 725** а) На концерте для первоклассников выступают 3 девочки и 4 мальчика. Сколько различных вариантов программы можно составить, если решено, что первой будет выступать девочка?
- б) У второклассника Миши 3 карточки с цифрами 0, 5, 8. Сколько различных трёхзначных чисел он может из них составить?

Чему вы научились

Это надо знать (основные теоретические сведения)

- 1 Что называется решением уравнения с двумя переменными? Укажите несколько решений уравнения $4x - y = 4$.
- 2 Дайте определение линейного уравнения с двумя переменными. Какие из следующих уравнений являются линейными:

$$x + y = 0, \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3,$$

$$2x - 5y = 8, \quad y - x^2 = 6?$$

- 3 Что является графиком уравнения $ax + by = c$, где хотя бы один из коэффициентов a и b отличен от 0?

- 4 Найдите угловой коэффициент прямой $5x + 2y = 9$.

- 5 Прямые, изображённые на рисунке 4.44, могут быть заданы уравнениями вида $y = kx$. Для каждой прямой укажите знак коэффициента k .

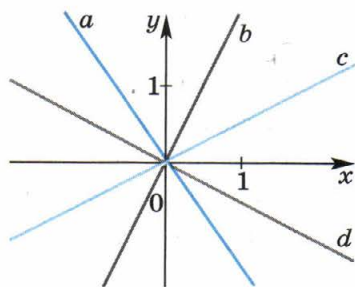


Рис. 4.44

- 6 Каков геометрический смысл коэффициента l в уравнении $y = kx + l$? В какой точке пересекает ось y прямая $y = 3x - 10$?
- 7 Сформулируйте условие параллельности двух прямых, заданных уравнениями вида $y = kx + l$. Приведите примеры уравнений, задающих параллельные прямые.
- 8 Что называется решением системы двух уравнений с двумя переменными? Является ли решением системы уравнений $\begin{cases} x + 2y = -5 \\ x - y = 7 \end{cases}$ пара чисел: $(3; -4)$? $(-1; -2)$?
- 9 На примере системы уравнений $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 7x + 2y = 16 \end{cases}$ расскажите, как решают систему методом сложения.
- 10 Используя графические соображения, определите, какая система имеет единственное решение, какая система не имеет решений, какая система имеет бесконечное множество решений:

$$1) \begin{cases} 3x - y = 5 \\ 6x - 2y = 10; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4x - y = 8 \\ 8x - y = 8; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} y = 3x + 9 \\ 6x - 2y = -27. \end{cases}$$

- 11 На примере системы уравнений $\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$ расскажите, как решают систему методом подстановки.

Это надо уметь (обязательные результаты обучения)

- Найдите какие-нибудь два решения уравнения $7x + 2y = 14$.
- Является ли решением уравнения $xy - x = 18$ пара чисел: $(-3; -5)$, $(-5; -3)$, $(2; 10)$?
- Проходит ли прямая $3x - 4y = 48$ через точку $A(20; 2)$? через точку $B(24; 6)$?
- Вычислите координаты точек пересечения прямой $4x - 5y = 10$ с осями координат.
- Постройте график уравнения:
 - $9x - 3y = 6$;
 - $y = -4x + 2$;
 - $y = \frac{1}{3}x$;
 - $y = -x$;
 - $y = -5$;
 - $x = 4$.
- Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 5x + 2y = 8 \\ 3x - y = 7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - y = 5 \\ xy = 14. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x + 4y = 13 \\ 5x + 2y = 17; \end{cases}$

- 7 Пользуясь рисунком 4.45, решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x + y = 2. \end{cases}$

- 8 Вычислите координаты точки пересечения прямых $3x - y = 2$ и $2x - y = 3$.
- 9 Вычислите координаты точки пересечения прямой $y = 2 + x$ и окружности $x^2 + y^2 = 10$.

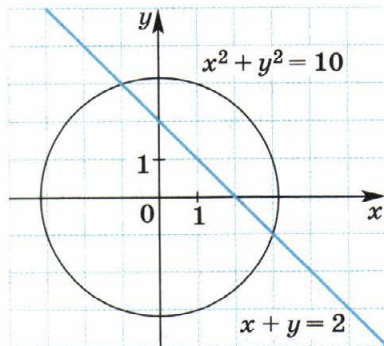
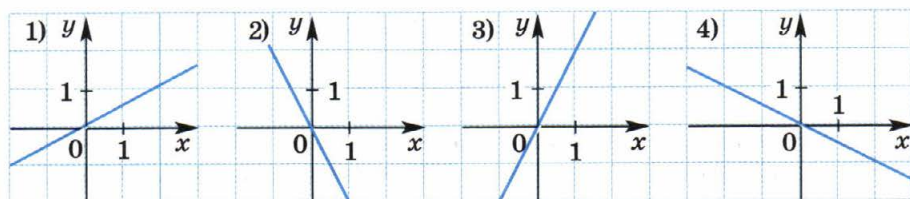


Рис. 4.45

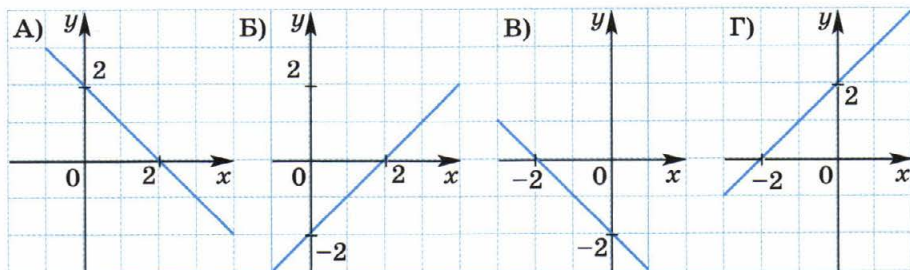
- Составьте систему уравнений и решите задачу (10–11).
- 10 Три карандаша и пять авторучек вместе стоят 50 р., а шесть карандашей и три авторучки вместе стоят 51 р. Сколько стоит карандаш и авторучка в отдельности?
- 11 Найдите стороны прямоугольника, площадь которого равна 24 см^2 , а периметр равен 20 см.

Проверьте себя (тест)

- Какая из следующих пар чисел является решением уравнения $x^2 - y^2 = 25$?
1) (0; 5) 2) (5; 0) 3) (6; 3) 4) (3; 6)
- Для художественной студии планируется купить коробки карандашей: часть по цене 90 р. и часть по цене 50 р. На всю покупку может быть потрачено 1300 р. Какое наибольшее число коробок с карандашами может быть куплено на эту сумму?
1) 16 2) 18 3) 22 4) 24
- Какое из следующих уравнений не задаёт прямую?
1) $x - 2y - 1 = 0$ 2) $2x + y = 0$ 3) $2x - 7 = 0$ 4) $2xy = 1$
- Через какую из точек проходит прямая $3x - 8y = -25$?
1) (3; 2) 2) (-3; -2) 3) (3; -2) 4) (-3; 2)
- Укажите уравнение прямой, проходящей через точки $A(1; 5)$ и $B(-1; 4)$.
1) $2x - y = -3$ 2) $x - 2y = -9$ 3) $x + 2y = 7$ 4) $2x + y = 7$
- Соотнесите каждое уравнение с его графиком:
А) $y = 2x$ Б) $y = -2x$ В) $y = -\frac{1}{2}x$ Г) $y = \frac{1}{2}x$



- Соотнесите каждую прямую с её уравнением:

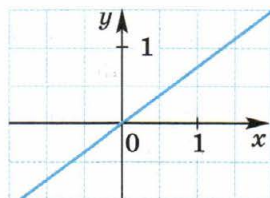


- 1) $x + y = -2$ 2) $x - y = 2$ 3) $x + y = 2$ 4) $x - y = -2$

- 8 Какая прямая проходит через I, II и III координатные четверти?
 1) $y = -3x + 5$ 2) $y = -3x - 5$ 3) $y = 3x - 5$ 4) $y = 3x + 5$
- 9 Выберите уравнение прямой, параллельной прямой $y = 4x$ и проходящей через точку (10; 39).
 1) $y = -4x$ 2) $y = -4x + 1$ 3) $y = 4x + 1$ 4) $y = 4x - 1$
- 10 В какой координатной четверти находится точка пересечения прямых $2x - 3y = 5$ и $x - 6y = -2$?
 1) в первой 2) во второй 3) в третьей 4) в четвёртой

- 11 Определите, через какую из заданных точек проходит прямая, изображённая на рисунке.

- 1) (6; 8) 3) (15; 20)
 2) (8; 12) 4) (16; 12)



- 12 Какая из пар чисел является решением системы уравнений

$$\begin{cases} x + y = -5 \\ x^2 - y^2 = 13 \end{cases}$$

- 1) (2; -7) 2) (-5; 0) 3) (-3,8; -1,2) 4) (-3,2; -1,8)
- 13 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ \frac{2x}{3} + y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

- 14 В питомнике одинаковыми рядами высадили 90 ёлок. Оказалось, что число рядов на 1 меньше числа ёлок в каждом ряду. Сколько рядов и сколько ёлок в каждом ряду?
 Пусть x — число рядов, а y — число ёлок в каждом ряду. Какая система уравнений соответствует условию задачи?

- 1) $\begin{cases} xy = 90 \\ y = x - 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = 90 \\ y - x = 1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy = 90 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2(x + y) = 90 \\ y - x = 1 \end{cases}$

Функции

Самые разные науки: физика, химия, биология, экономика и многие другие, занимающиеся изучением процессов и явлений, которые происходят в природе и обществе, имеют дело с понятием функции. Это понятие является математическим средством описания и исследования зависимости между величинами. Многие из таких зависимостей вам знакомы. Например, чем больше скорость, тем большее расстояние пройдёт объект за данное время.

Казалось бы, всё очень просто. Однако понятие функции формировалось на протяжении веков. Вначале оно не было чётким и определённым, и только работы ряда великих математиков — от Лейбница в XVII в., который и предложил термин «функция», до целой плеяды учёных XIX в., среди которых и наш великий соотечественник Николай Лобачевский, — позволили внести ясность в понимание смысла этого понятия.

5.1 Чтение графиков

- 1** Вам уже приходилось работать с графиками различных зависимостей между величинами. Зависимости представлены на графиках в наглядной, удобной для восприятия форме, что позволяет получать с их помощью самую разнообразную информацию. Разберём несколько примеров.

Пример 1. Родители измеряли рост сына каждые два года с 2 до 12 лет. Получились такие результаты:

Возраст, годы	2	4	6	8	10	12
Рост, см	82	102	108	120	126	132

Затем родители построили график роста сына. Для этого на горизонтальной оси отметили возраст, а на вертикальной — соответствующий рост. В результате получились точки, которые для наглядности соединили отрезками (рис. 5.1).

С помощью построенного графика можно узнать, например, какого роста был сын в 9 лет, в каком возрасте его рост был 130 см. Конечно, результат, прочитанный по графику, может отличаться от

реального результата, но даёт о нём достаточно хорошее представление.

По графику легко также увидеть, когда мальчик рос быстрее, а когда — медленнее. Например, с 2 до 4 лет он рос быстрее, чем с 4 до 6 лет. Можно вычислить среднюю скорость его роста в определённый период времени, для этого нужно найти отношение изменения роста за этот промежуток к его продолжительности.

Так, с 6 до 8 лет мальчик вырос со 108 до 120 см. Значит, средняя скорость (v) его роста в этот период была равна

$$\frac{120 - 108}{8 - 6} = 6 \text{ (см в год).}$$

С 10 до 12 лет мальчик рос медленно:

$$v = \frac{132 - 126}{12 - 10} = 3 \text{ (см в год).}$$

С 2 до 4 лет он рос очень быстро:

$$v = \frac{102 - 82}{4 - 2} = 10 \text{ (см в год).}$$

2 Часто в одной и той же системе координат строят не один, а два или несколько графиков. И это позволяет сопоставлять представленные на них процессы.

Пример 2. На рисунке 5.2 изображены графики, показывающие, как менялся вес двух детей, родившихся в один и тот же день, в первый месяц их жизни. (Вы, конечно, понимаете, что в данном случае нужно говорить о массе детей. Но в реальной жизни в этой ситуации обычно употребляют слово «вес».)

У каждого из малышей вес сначала снижался, а потом и Маша, и Миша стали прибавлять в весе — так всегда бывает у новорождённых. Маша родилась с меньшим весом, однако уже на 14-й день она догнала Мишу, на 15-й день достигла своего первоначального

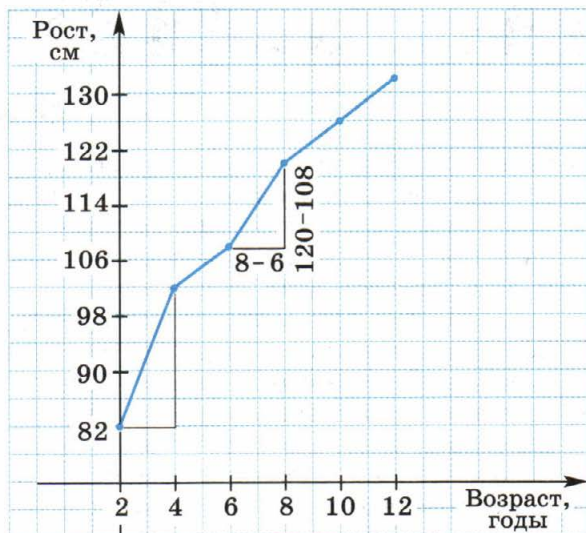


Рис. 5.1

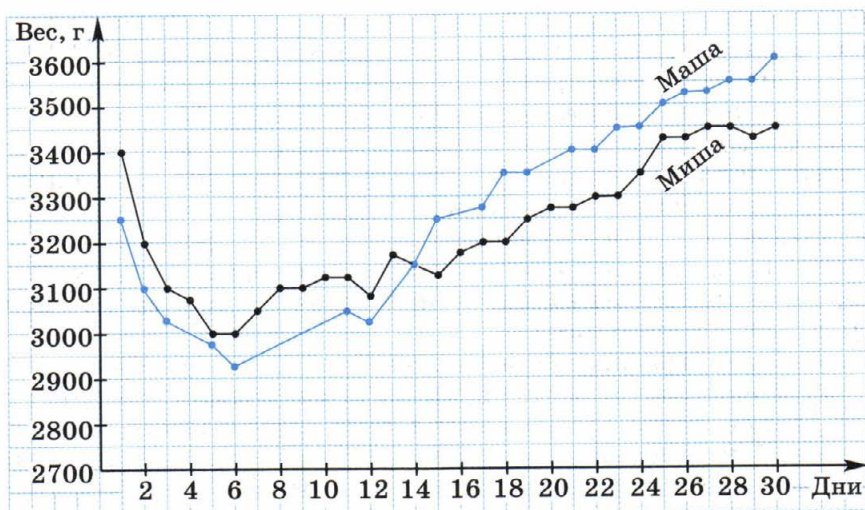


Рис. 5.2

веса и к концу месяца весила на 150 г больше, чем Миша. Наверное, Маша быстрее приспособилась к новой жизненной среде; она оказалась более активной, чем Миша.

Пример 3. В учебнике для 7 класса вы уже встречались с графиками бега трёх спортсменов (рис. 5.3). Тренер, чтобы определить их возможности, предложил бежать «на износ».

Из сопоставления графиков сразу же видно, что Борис бежал дольше всех, а Вадим пробежал дальше всех. В то же время, анализируя графики, тренер может получить ещё массу полезной информации, гораздо больше, чем если бы он просто узнал по секундомеру, за сколько времени бегуны преодолели свои дистанции.

Так, тренер видит, что с точки зрения поставленной им задачи — проверки выносливости — Андрей неправильно построил тактику бега и поэтому выдержал всего один час. Однако он видит так-

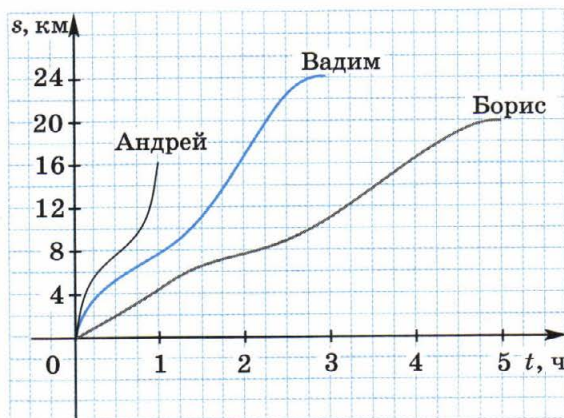


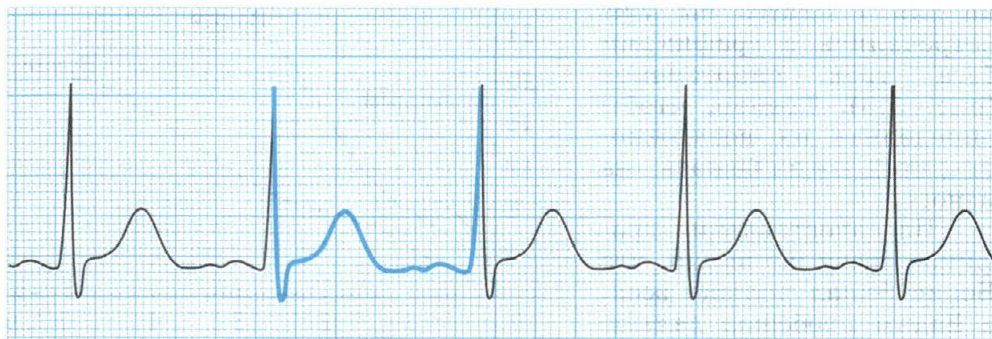
Рис. 5.3

же, что график бега Андрея круто идёт вверх, т. е. Андрей сразу же побежал очень быстро — в первые 15 мин он пробежал 6 км, затем, устав, снизил скорость (кривая на участке от 15 мин до 45 мин более пологая), а потом снова «рванул» и ещё через 15 мин полностью выдохся. Отсюда тренер может сделать вывод, что из Андрея может получиться неплохой спринтер — бегун на короткие дистанции.

По графику бега Бориса видно, что он бежал, мягко говоря, не спеша, пробегая за 1 ч примерно 4 км, т. е., попросту говоря, медленно шёл (обычная скорость пешехода примерно 5—6 км/ч). Возможно, он слишком буквально понял задачу — как можно дольше продержаться на дистанции.

Наконец, по графику бега Вадима видно, что он обладает хорошими способностями к бегу: начал он резво (график довольно круто идёт вверх), затем слегка снизил темп (график стал более пологим), через 1 ч снова взвинтил темп и держал его ещё 1 ч (график снова круто идёт вверх), после чего Вадим стал снижать темп и, явно преодолевая усталость, продержался ещё полчаса. Другими словами, Вадим умеет и быстро бегать, и распределять свои силы на дистанции, и, главное, обладает волевыми качествами.

3 Пример 4. График, который вы видите на рисунке 5.4, — это кардиограмма. По ней судят о работе сердца. В явном виде оси на этом графике не изображаются, но миллиметровая бумага позволяет врачу считывать интересующие его показания.



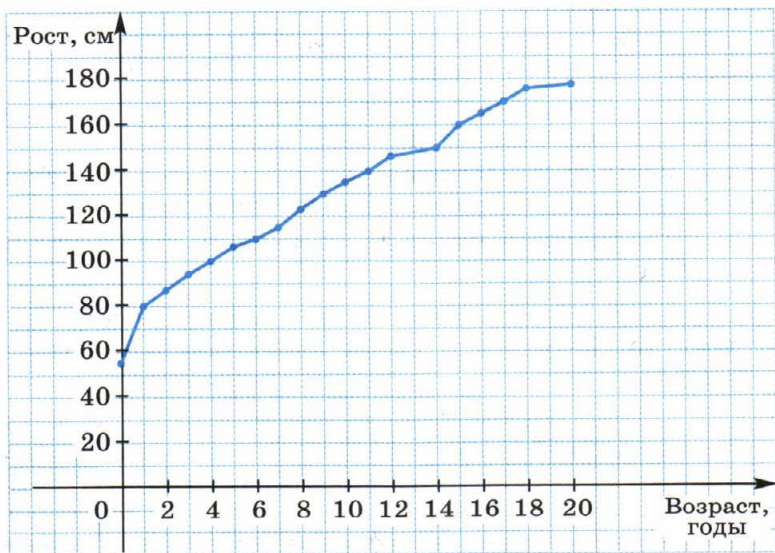
■ Рис. 5.4

Выделенный на графике цветом фрагмент показывает сердечный ритм. Вы видите, что этот фрагмент периодически повторяется. Такого рода *периодические* процессы в реальной жизни встречаются часто. Это, например, изменение расстояния от Земли до Солнца во время вращения нашей планеты вокруг Солнца — через каждый год Земля возвращается в одну и ту же точку своей орбиты, и весь процесс снова повторяется.

- Рассмотрите график на рисунке 5.1. На нём выделены два участка с разной скоростью роста мальчика. Объясните, как на графике различаются более высокая и более низкая скорости протекания процесса.
- Рассмотрите график на рисунке 5.3. Найдите среднюю скорость бега каждого из спортсменов на всей дистанции.

A

- 726** На рисунке 5.5 изображён график изменения роста Тани от рождения до 20 лет. Используя график, ответьте на вопросы:
- Какого роста была Таня в момент рождения? в 1 год? в 5 лет? в 12 лет?
 - К какому возрасту рост Тани достиг 1 м? 1 м 50 см?
 - Когда рост Тани стал вдвое больше её роста при рождении?
 - Укажите промежуток времени, когда Таня росла быстрее всего.
 - Когда Таня росла быстрее — с 4 до 12 лет или с 12 до 20 лет?



■ Рис. 5.5

- 727** На рисунке 5.6 изображён график температуры воздуха в городе Весеннем 25 февраля 2012 г. По графику определите:
- какая температура была в 6 ч; в 11 ч; в 18 ч;
 - в какое время дня температура была -3°C ; 2°C ; 4°C ;

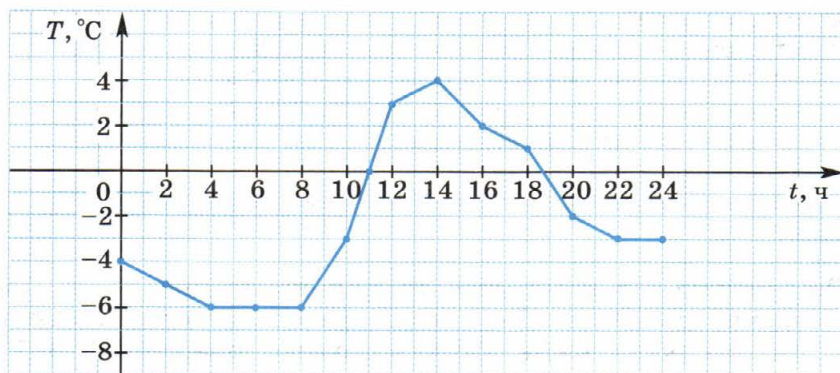


Рис. 5.6

- в) в какое время суток температура была выше 0°C ; ниже 0°C ;
 г) в какое время суток температура повышалась; понижалась; оставалась постоянной;
 д) в какое время суток температура была максимальной и в какое время — минимальной;
 е) какова была максимальная температура за сутки; минимальная температура за сутки;
 ж) в какое время суток температура повышалась с наибольшей скоростью; понижалась с наибольшей скоростью;
 з) какова была средняя скорость изменения температуры с 8 до 10 ч; с 0 до 4 ч.

728 Метеоролог каждый полдень в течение месяца измерял температуру воздуха. Результаты своих наблюдений он представил в виде таблицы:

День наблюдения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$t, ^{\circ}\text{C}$	-4	-3	-2	-1	0	2	2	3	3	4	5	5	5	5	6
День наблюдения	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$t, ^{\circ}\text{C}$	7	8	8	7	7	7	7	7	9	10	10	9	9	9	10

Постройте график температуры. Проанализируйте, как менялась температура в течение этого месяца. В каком месяце в вашей местности возможна такая ситуация?

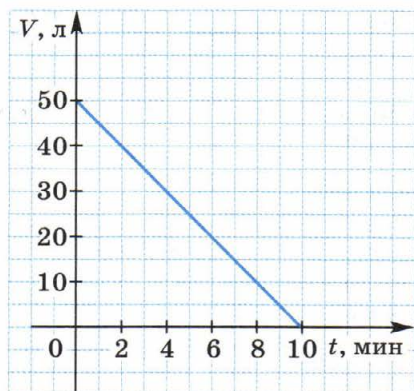


Рис. 5.7

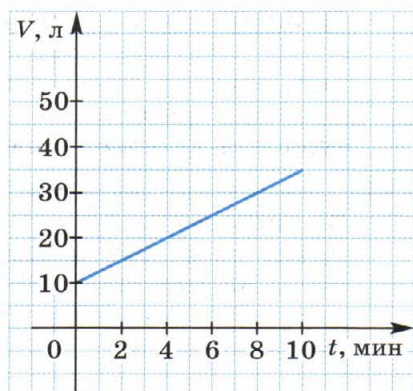


Рис. 5.8

729 На рисунках 5.7 и 5.8 изображены два графика. Один из них показывает процесс наполнения бака водой, а другой — процесс вытекания воды из бака.

1) Определите, какой процесс описывает каждый из графиков.

2) По каждому графику ответьте на вопросы:

а) Сколько литров воды было в баке первоначально?

б) Сколько литров воды стало в баке через 1 мин? через 3 мин? через 5 мин?

в) Через сколько минут в баке оказалось 20 л воды?

г) На сколько литров меняется количество воды в баке за 1 мин?

3) Какой процесс протекал быстрее — наполнение бака водой или вытекание воды из бака? Вычислите скорость, с которой вода вливалась в бак; вытекала из бака.

730 1) Турист в течение 30 мин дошёл от лагеря до озера, расположенного в 2 км от лагеря, и, пробыв там 40 мин, вернулся обратно. На всю прогулку он затратил полтора часа. На каком из графиков (рис. 5.9) изображена описанная ситуация, если на вертикальной оси отмечено расстояние туриста от лагеря?

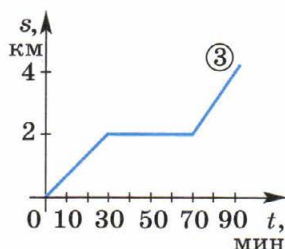
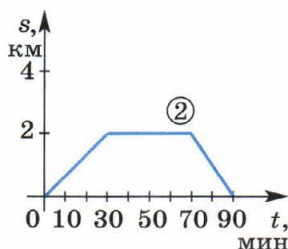
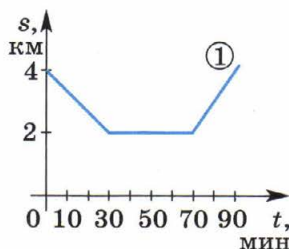


Рис. 5.9

2) Какой из этих графиков будет соответствовать описанной ситуации, если на вертикальной оси отмечается расстояние, пройденное туристом во время своего похода?

- 731** ■ **ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО** ■ Андрей и Вадим совершили утреннюю пробежку по одному и тому же маршруту. На рисунке 5.10 изображены графики, показывающие зависимость расстояния s , которое пробежал каждый из них, от времени бега t . Используя графики, определите, какие из следующих утверждений верны, а какие нет.



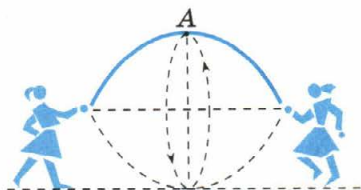
■ Рис. 5.10

- 1) Длина дистанции 6 км.
 - 2) Андрей и Вадим стартовали одновременно.
 - 3) Вадим перегнал Андрея через 30 мин после своего старта.
 - 4) Андрей догнал Вадима в середине дистанции.
 - 5) Первые 2 км Андрей и Вадим бежали с одинаковой скоростью.
 - 6) Андрей пробежал всю дистанцию на 10 мин быстрее Вадима.
- Запишите ещё несколько верных утверждений, описывающих утреннюю пробежку Андрея и Вадима.

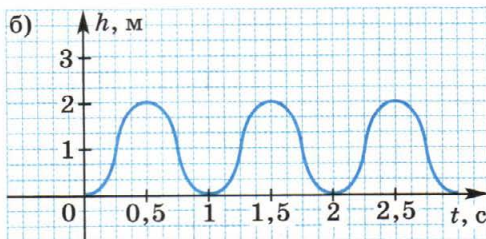
- 732** Два человека крутят скакалку (рис. 5.11, а). Возьмём одну точку — середину скакалки (точку А) — и будем наблюдать, как меняется её высота над землёй в зависимости от времени. На рисунке 5.11, б изображён график, показывающий эту зависимость. Наблюдаемый нами процесс — периодический. Используя график, ответьте на вопросы:

- а) За какое время происходит один полный оборот скакалки?
- б) На какой высоте находится точка А через 0,5 с после начала вращения? через 1,25 с? через 2 с?

а)



б)



■ Рис. 5.11

в) В какие моменты времени точка A находится на высоте 1 м? Назовите все такие моменты, если скакалку продолжают крутить 10 с.

г) В какие моменты времени точка A находится на высоте 2 м над землёй? Сколько раз она окажется на этой высоте, если скакалку крутят 2 мин?

Б

733 На рисунке 5.12 изображён график движения велосипедиста из пункта A в пункт B и график движения пешехода из пункта B в пункт A по той же дороге.

Ответьте на вопросы:

а) Каково расстояние между пунктами A и B ?

б) Через сколько времени после начала движения велосипедист и пешеход встретились? Сколько километров к этому времени проехал велосипедист и прошёл пешеход?

в) Кто раньше прибыл в конечный пункт — велосипедист или пешеход? На сколько времени раньше?

г) Во сколько раз скорость велосипедиста больше скорости пешехода?

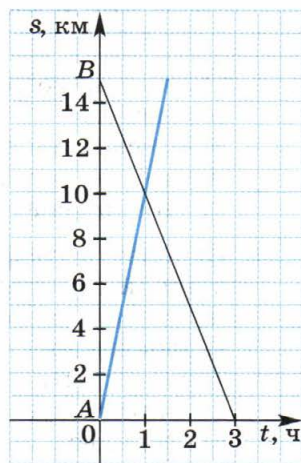


Рис. 5.12

734 Яхта отошла от причала на берегу озера и в течение часа курсировала по озеру. Через час она вернулась к причалу. Максимальное удаление от причала составило 3 км.

а) Начертите график, показывающий, как в течение этого часа могло меняться расстояние s (км) от яхты до причала, и прокомментируйте этот график.

б) Используя свой график, постройте график движения яхты, отложив по горизонтальной оси время движения, а по вертикальной — пройденный яхтой путь.

735 Олег и Пётр соревновались на дистанции 200 м в 50-метровом бассейне. Графики их заплывов показаны на рисунке 5.13. По горизонтальной оси отложено время, а по вертикальной — соответствующее расстояние пловца от старта.

1) Используя графики, ответьте на вопросы:

а) Сколько времени затратил каждый спортсмен на первые 50 м? на всю дистанцию?

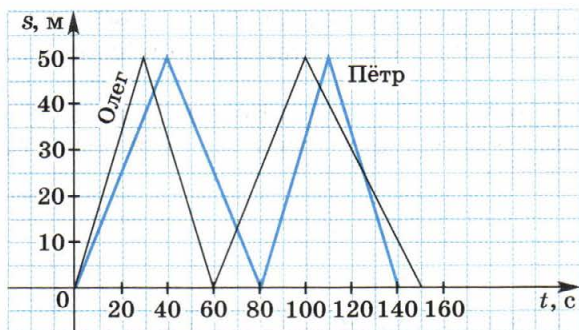


Рис. 5.13

б) Кто выиграл соревнование? На сколько секунд он обогнал соперника?

в) На сколько метров отстал проигравший от победителя к моменту его финиша?

2) Прокомментируйте подробно весь ход соревнования.

736 Используя графики, изображённые на рисунке 5.13, постройте в одной системе координат графики движения этих же спортсменов, отложив по горизонтальной оси время движения, а по вертикальной — расстояние, которое проплыл спортсмен с начала заплыва.

1) Определите по графику:

а) среднюю скорость движения каждого спортсмена (в метрах в минуту) на первой 100-метровке;

б) среднюю скорость движения каждого спортсмена (в метрах в минуту) на всей дистанции.

2) Объясните, что означают с точки зрения содержания задачи точки пересечения графиков на рисунке 5.13 и на вашем рисунке.

5.2 Что такое функция

1 Рассматривая графики реальных зависимостей, вы не могли не заметить то общее, что присутствовало в каждом примере: мы всегда имели дело с двумя взаимосвязанными величинами; с изменением значений первой величины менялись и значения второй. В таких ситуациях одну величину называют *независимой*, а другую — *зависимой*.

Так, с течением времени изменялись рост мальчика, вес ребёнка, пройденная бегом дистанция. В этих примерах время — независимая величина. Остальные величины, значения которых опре-

делялись значениями времени, зависимые. При построении графиков независимую величину мы всегда откладываем по горизонтальной оси, а зависимую — по вертикальной.

Зависимость между величинами может устанавливаться не только с помощью графика. И конечно, независимой величиной может быть не только время. Вы это увидите из следующих примеров.

Пример 1. Для перевода температуры, измеренной в градусах Цельсия, в градусы Фаренгейта пользуются формулой $F = \frac{9}{5}C + 32$, где C — число градусов по шкале Цельсия, а F — число градусов по шкале Фаренгейта. Для каждого значения температуры по Цельсию с помощью этой формулы можно найти соответствующее значение температуры по шкале Фаренгейта. Например, нормальной температуре человека $36,6^\circ$ по шкале Цельсия соответствует температура $97,88^\circ$ по шкале Фаренгейта.

Эту зависимость можно изобразить и графически. Для этого достаточно построить график уравнения $F = \frac{9}{5}C + 32$ (рис. 5.14).

(Объясните, почему этот график — прямая линия.)

В данном примере в качестве независимой величины рассматривается температура по шкале Цельсия, а в качестве зависимой — температура по шкале Фаренгейта. Так

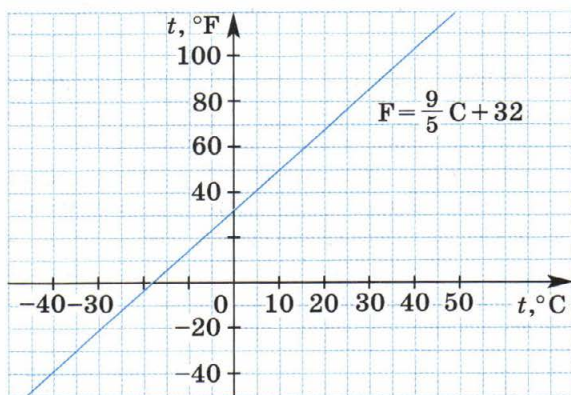


Рис. 5.14

как числовые значения температур по Цельсию и Фаренгейту обозначены соответственно буквами C и F , то говорят также, что C — *независимая переменная*, а F — *зависимая переменная*.

Пример 2. В таблице, помещённой на с. 238, показано, как при нагревании воды меняется количество поваренной соли, которое может раствориться в 100 г воды без осадка. Здесь t — независимая переменная, а m — зависимая переменная. Каждому значению температуры t (в градусах Цельсия), равному 10, 20, 30, ..., 100, соответствует вполне определённое значение m — масса соли (в граммах).

$t, ^\circ\text{C}$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$m, \text{г}$	35,8	36,0	36,3	36,9	37,0	37,3	37,9	38,4	39,1	39,8

График зависимости m от t изображён на рисунке 5.15.

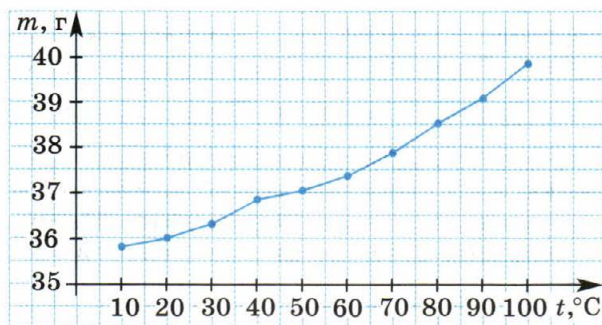


Рис. 5.15

2 Изучение зависимостей между различными величинами составляет смысл многих наук. Средством описания всего многообразия реальных зависимостей на математическом языке служит понятие *функции*.

Главное в зависимости переменных состоит в том, что каждому значению независимой переменной некоторым образом — с помощью графика, таблицы, формулы или как-то иначе — поставлено в соответствие одно определённое значение зависимой переменной. В таких случаях для зависимой переменной в математике используют термин «функция».

Переменную y называют *функцией* переменной x , если каждому значению x из некоторого числового множества соответствует одно определённое значение переменной y .

Для независимой переменной тоже есть специальное название: её называют *аргументом*.

Например, формула $y = x^2 - 2x$ задаёт переменную y как функцию переменной x : по этой формуле для любого значения аргумента x можно вычислить соответствующее значение функции y .

Формула $S = a^2$ задаёт площадь квадрата S как функцию его стороны a . Формула $s = 60t$ задаёт путь s , пройденный телом при равномерном движении, как функцию времени движения t .

Выбор букв, которыми обозначены переменные, вообще говоря, роли не играет. Однако в математике для обозначения аргумента

и функции традиционно употребляют буквы x и y , а в задачах более конкретных — скажем, геометрических или физических — используются стандартные для этих наук обозначения длины, площади, скорости, времени и т. д.

Таким образом, функция — это переменная, значения которой определяются значениями другой переменной. В то же время в математике этот термин употребляется и в более широком смысле.

Функцией часто называют не только одну из двух переменных, но и саму зависимость между ними, а также правило, по которому устанавливается соответствие между значениями аргумента и значениями функции. (Как мы уже видели, это правило может быть представлено разными способами — формулой, таблицей, графиком и т. д.)

3 Правило, по которому по данному значению аргумента находят соответствующее значение функции, принято обозначать какой-либо буквой. Чаще всего это буква f . Чтобы показать, что значения функции y получаются из значений аргумента x по правилу f , пишут: $y = f(x)$. (Читается: «Эф от икс».) Значение функции, соответствующее значению аргумента, равному, например, -3 , обозначают так: $f(-3)$.

Пример 3. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{5}{x+1}$. Найдём $f(1)$.

В данном случае функция задана алгебраическим выражением, поэтому $f(1)$ — это результат подстановки в него вместо x числа 1. Имеем

$$f(1) = \frac{5}{1+1} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

4 Обратите внимание: в формулу $f(x) = \frac{5}{x+1}$ вместо переменной x можно подставить любое число, кроме -1 . Иными словами, аргумент x не может принимать значение, равное -1 .

Все значения, которые может принимать аргумент, образуют *область определения функции*.

Если функция задана формулой и её область определения не указана, то считают, что она совпадает с областью допустимых значений аргумента. Например, областью определения функции $f(x) = x^2 - 2x$ является множество всех чисел. А областью определения функции $\varphi(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$ является множество всех чисел, кроме 0 и 2.

В то же время при рассмотрении конкретных задач область определения функции сужают, учитывая «происхождение» аргумента.

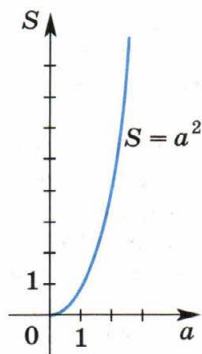


Рис. 5.16

Например, в формулу $S = a^2$ вместо переменной a можно подставить любое число. Однако если речь идёт о площади квадрата S как функции его стороны a , то областью определения этой функции является множество положительных чисел (рис. 5.16).

В заключение заметим, что само слово «функция» вы наверняка встречали в обычном языке в словосочетаниях типа: «В функции дежурного по классу входит...» или «В мои функции это не входит». Эти слова и математический термин «функция» очень близки по значению. В самом деле, слово «функция» происходит от латинского *functio* — «исполнение, служебная обязанность», так что его значение в русском языке в точности соответствует латинскому. А в математическом языке оно употребляется в переносном смысле, с элементом метафоры: функция «исполняет» инструкции. Например, равенство $f(x) = 2x - 1$ есть форма задания инструкции: значение аргумента x умножить на 2 и от результата отнять 1.

- Используйте формулу перевода температуры по шкале Фаренгейта в температуру по шкале Цельсия (пример 1, фрагмент 1) для ответа на вопросы:
 - а) Какая температура по шкале Фаренгейта соответствует 100° по шкале Цельсия?
 - б) Какой температуре по шкале Цельсия соответствует 0° по шкале Фаренгейта?
- Используя график на рисунке 5.15 или соответствующую ему таблицу (пример 2, фрагмент 1), определите:
 - а) Увеличивается или уменьшается с повышением температуры воды количество соли, которое можно растворить в 100 г воды без осадка?
 - б) Если нагреть 100 г воды до 70°C , то можно ли растворить в ней без осадка больше 37 г соли?
 - в) До какой температуры надо нагреть 100 г воды, чтобы можно было растворить в ней не меньше 39 г соли?
- Функция задана формулой $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{5}{x+1}$ (фрагмент 3).
 - а) Объясните, что означает запись $f(1)$.
 - б) Запишите с помощью символов значение данной функции при значении аргумента, равном 0. Найдите это значение.
- а) Что называют областью определения функции (фрагмент 4)?
 - б) Что принято считать областью определения функции, заданной формулой, если она специальным образом не указана? Укажите область определения функции: $f(x) = x^2 + 3x$; $f(x) = \frac{10}{x-1}$.
 - в) Укажите область определения функции, заданной формулой $S = a^2$, где S — площадь квадрата, a — длина стороны квадрата.

A

ПРИМЕНЯЕМ АЛГЕБРУ (737–739)

- 737** а) Автомобиль должен проехать 600 км. Двигаясь со скоростью v км/ч, он затратит на этот путь t ч. Задайте формулой время движения t как функцию скорости v . Найдите время движения, если скорость движения равна 40 км/ч; 60 км/ч; 80 км/ч. Найдите скорость движения, если время движения равно 5 ч; 6 ч; 8 ч.
- б) Бассейн наполняется водой с помощью насоса, через который вода поступает со скоростью 20 л в минуту. За t мин в бассейн наливается V л воды. Задайте формулой зависимость V от t . Найдите значение функции V при значении аргумента t , равном 5; 10; 12,5. Найдите значение аргумента t , которому соответствует значение функции V , равное 60; 150; 340.
- 738** а) Имелось 100 кг муки. Ежедневно расходовали 3 кг муки. Через x дней осталось y кг муки. Задайте формулой зависимость y от x . Найдите значение функции y при значении аргумента x , равном 3; 10; 33. Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно 40; 55; 85. Укажите область определения функции.
- б) Нужно купить карандаши по 4 р. за штуку. Всего имеется 50 р. После покупки n карандашей останется s р. Задайте формулой зависимость s от n . Составьте таблицу значений аргумента n и функции s . Постройте соответствующие точки в координатной плоскости. Сколько точек получилось? Какова область определения функции?
- 739** а) Число диагоналей p выпуклого многоугольника является функцией числа его вершин n . Задайте эту функцию формулой. Какова её область определения? Заполните таблицу, в которой даны некоторые значения аргумента n и функции p :

n	5		10	
p		14		54

Проинтерпретируйте полученные результаты на геометрическом языке.

- б) Среди учащихся восьмых классов школы провели шахматную олимпиаду, в которой каждый участник сыграл с каждым другим участником по одной партии. Число сыгранных

партий r является функцией числа участников олимпиады m . Задайте эту функцию формулой. Какова область определения этой функции? Заполните таблицу:

m	5	6		
r			28	55

Как можно прокомментировать данные таблицы?

740 Найдите значение функции, заданной формулой:

а) $y = 3x + 5$ для значения аргумента, равного -2 ; -1 ; 0 ; 3 ;

б) $y = 2x^2 - 10x$ для значения аргумента, равного -1 ; 0 ; 2 ; 3 ;

в) $y = x^3 - 3$ для значения аргумента, равного -1 ; -2 ; 0 ; 1 ; 2 ;

г) $y = \frac{2}{3+x}$ для значения аргумента, равного -5 ; -1 ; 0 ; 5 .

741 Дана функция $y = 1 - x^3$. Заполните таблицу:

x	-3			0		2	
y		9	2		0		-26

РАБОТАЕМ С СИМВОЛАМИ (742–744)

742 Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = x^2 + 4$.

а) Как обозначить значение функции, соответствующее значению аргумента, равному 10 ? 0 ? -8 ? Вычислите эти значения функции.

б) Используя функциональную символику, запишите следующее утверждение: если значение аргумента равно 5 , то значение функции равно 29 . Верно ли это утверждение?

в) Запишите на символическом языке утверждение: функция принимает равные значения при $x = -2$ и $x = 2$. Верно ли это утверждение?

743 Дана функция $f(x) = -\frac{1}{x} + 5$. Найдите:

а) $f(-1)$; б) $f\left(\frac{1}{4}\right)$; в) $f(-0,1)$; г) $f(2)$.

744 Известно, что $f(x) = 0,5x^2 - 4$. Сравните:

а) $f(-5)$ и $f(4)$; б) $f(1)$ и $f(-1)$; в) $f(\sqrt{8})$ и $f(-\sqrt{10})$.

745 ■ ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО ■ Дана функция $\varphi(x) = 1 - 3x^3$. Какое из следующих утверждений верно?

- 1) $\varphi(2) = 23$ 2) $\varphi(2) = 25$ 3) $\varphi(2) = -25$ 4) $\varphi(2) = -23$

746 Найдите значение аргумента, при котором:

- а) функция $f(x) = -1,5x$ принимает значение, равное 9;
 б) функция $f(x) = -5x - 20$ принимает значение, равное 15;
 в) функция $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$ принимает значение, равное 2;
 г) функция $f(x) = \frac{1}{x}$ принимает значение, равное 10.

747 Найдите область определения функции, заданной формулой:

- а) $y = 5x - 12$; в) $y = \frac{5}{x+1}$; д) $y = \frac{x}{4x^2 - 9}$;
 б) $y = 2x^2 - 3x + 2$; г) $y = \frac{10}{4+x^2}$; е) $y = \frac{x^2 - 25}{10}$.

Б

748 Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{если } x > 0 \\ 5, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

Найдите значение этой функции при значении аргумента, равном -3 ; -2 ; 0 ; $0,1$; 5 .

749 Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6, & \text{если } x \geq 3 \\ 6 - x^2, & \text{если } x < 3. \end{cases}$$

Найдите значение этой функции при значении аргумента, равном:

- а) $\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{10}$; б) $2 - \sqrt{3}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $2\sqrt{3}$.

■ РАБОТАЕМ С СИМВОЛАМИ (750–751) ■

750 Дана функция $f(x) = x^2 + 4$. Найдите: $f(a)$; $f(-a)$; $f(a+1)$.

751 Даны функции $f(x) = \frac{x-5}{x+4}$ и $g(x) = 8 + \frac{1}{x}$. Покажите, что:

- а) $f(-5) = g\left(\frac{1}{2}\right)$; б) $f(-2) < g(-0,1)$.

- 752** Существуют ли значения аргумента, при которых:
- а) функция $y = x^2 + 7x + 15$ принимает значение, равное 5;
 - б) функция $y = x^2 - 1$ принимает значение, равное -4;
 - в) функция $y = x^4 + 3x^2 - 1$ принимает значение, равное 3;
 - г) функция $y = \frac{1}{3}x^3 + 1$ принимает значение, равное -10?

753 Найдите область определения каждой из функций:

а) $y = \sqrt{x}$ и $y = \frac{5}{\sqrt{x}}$; б) $y = \frac{1}{|x-2|}$ и $y = \frac{1}{|x|-2}$.

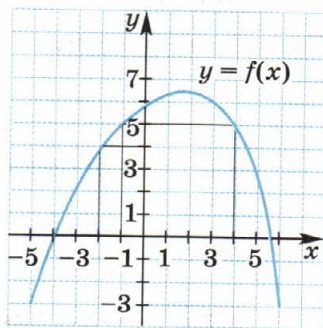
■ РАССУЖДАЕМ (754–755) ■

- 754** 1) Пусть символом $a(x)$ обозначено количество сестёр человека по имени x , а символом $b(x)$ — количество его братьев.
- а) Найдите $a(x)$, $b(x)$, если x — это вы.
 - б) Что означает запись $a(x) + b(x) + 1$? (x — это вы.)
 - в) Найдите $a(x)$, $b(x)$ и $a(x) + b(x) + 1$, если x — это ваш сосед по парте.
- 2) Пусть $m(x)$ — мать человека x , $o(x)$ — отец человека x . Как называют человека, который закодирован символом:
- а) $o(m(x))$; б) $m(o(x))$; в) $m(m(x))$; г) $o(o(x))$?
- 755** Пусть $f(x) = x - 3$, $g(x) = \sqrt{x}$. Найдите:
- а) $f(4) - g(4)$; б) $f(1) + g(1) + 1$; в) $f(g(100))$; г) $g(f(19))$.

5.3 График функции

1 Когда вы будете работать с графиками функций, вам постоянно придётся иметь дело с числовыми промежутками. Например, на рисунке 5.17 изображён график функции $y = f(x)$, областью определения которой является отрезок от -5 до 6. До сих пор числовые промежутки вы записывали с помощью неравенств. Однако существуют и другие способы обозначения промежутков, которые часто бывают более удобными.

Обратите внимание на разницу обозначений отрезка и интервала, замкнутого луча и открытого луча: если граничная точка принадлежит промежутку, то это показывается с помощью квадратной скобки, если нет — ставится круглая скобка. Символы $+\infty$ и $-\infty$ читаются так: «плюс бесконечность» и «минус бесконечность».



■ Рис. 5.17

Числовые промежутки

Название	Изображение	Неравенство	Обозначение
Отрезок		$a \leq x \leq b$	$[a; b]$
Интервал		$a < x < b$	$(a; b)$
Полуинтервал		$a < x \leq b$	$(a; b]$
		$a \leq x < b$	$[a; b)$
Замкнутый луч		$x \geq a$	$[a; +\infty)$
		$x \leq b$	$(-\infty; b]$
Открытый луч		$x > a$	$(a; +\infty)$
		$x < b$	$(-\infty; b)$

Вы, конечно, увидели, что для интервала от a до b принято такое же обозначение, как и для точки с координатами a и b . Здесь вы имеете дело с ситуацией, которая часто встречается и в обычном языке: слова-омонимы, такие, как «коса», «ключ», чрезвычайно распространены. Однако из контекста всегда можно понять, о чём идёт речь.

2 Вернёмся к графику функции, изображённому на рисунке 5.17. Каждой точке графика соответствует пара чисел: абсцисса точки — это значение аргумента, а её ордината — соответствующее значение функции. С помощью графика по значению аргумента можно найти соответствующее значение функции $y = f(x)$ и, наоборот, по известному значению функции найти значения аргумента, которым оно соответствует.

Найдём, например, значение функции при $x = -2$. Для этого через точку оси x с абсциссой, равной -2 , проведём к этой оси перпендикуляр. Точка пересечения перпендикуляра с графиком функции имеет координаты $(-2; 4)$. Значит, $f(-2) = 4$.

Найдём теперь по графику значения аргумента, при которых значение функции равно 5. Для этого проведём через точку оси y с ординатой, равной 5, прямую, перпендикулярную этой оси. Эта прямая пересекает график функции в двух точках: $(-1; 5)$ и $(4; 5)$. Это означает, что значение, равное 5, функция принимает дважды: при $x = -1$ и при $x = 4$.

3 Пусть функция задана формулой $y = 4 - x^2$. Эту формулу можно рассматривать как уравнение с двумя переменными. График этого уравнения и является графиком функции $y = 4 - x^2$.

Чтобы построить этот график, составим таблицу, в которой укажем некоторые пары значений аргумента x и функции y .

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	-0,5	-1	-1,5	-2	-2,5	-3
y	4	3,75	3	1,75	0	-2,25	-5	3,75	3	1,75	0	-2,25	-5

Отметим точки, указанные в таблице, на координатной плоскости и соединим их плавной линией (рис. 5.18). Мы получили линию, название которой вам уже известно, — это парабола.

Обратите внимание: функция $y = 4 - x^2$ принимает одинаковые значения при противоположных значениях аргумента, поэтому можно было бы сократить таблицу и использовать при построении графика симметрию относительно оси y .

4 Не всякое уравнение с двумя переменными задаёт функцию. Возьмём, например, уравнение $y^2 = x$. Его графиком является парабола, изображённая на рисунке 5.19. Проведём к оси x перпендикуляр через точку с абсциссой 4. Он пересечёт параболу в двух точках: $(4; 2)$ и $(4; -2)$, т. е. одному значению x , равному 4, в этом случае соответствуют сразу два значения y . Значит, это не функция.

Этот вывод можно было бы сделать и не обращаясь к графику. В самом деле, из уравнения $y^2 = x$ однозначно выразить y через x невозможно.

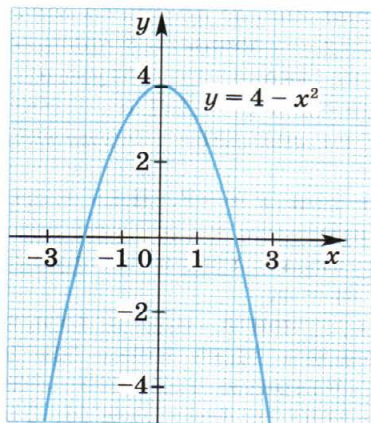


Рис. 5.18

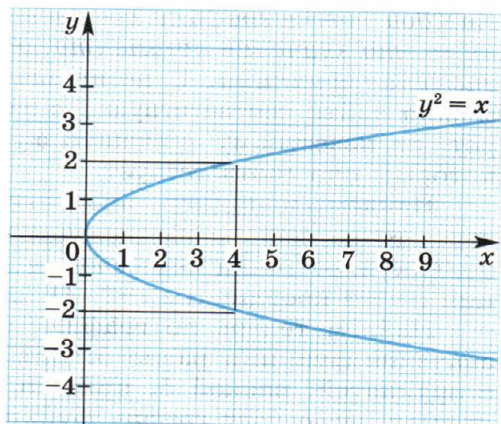


Рис. 5.19

- Откройте фрагмент 1 текста с таблицей «Числовые промежутки». Проиллюстрируйте конкретным примером каждый из представленных в таблице числовых промежутков: изобразите его на координатной прямой, запишите соответствующие неравенство и обозначение.
- Прочитайте фрагмент 2 текста. Используя рисунок 5.17, расскажите:
 - а) как с помощью графика функции $y = f(x)$ найти значение функции, соответствующее значению аргумента, равному -3 ;
 - б) как с помощью графика функции $y = f(x)$ найти x , при котором $f(x) = 3$.
- Прочитайте фрагмент 3 текста. Расскажите, как можно построить график функции, заданной формулой.
- Какие из графиков (рис. 5.20) могут служить графиками функций?

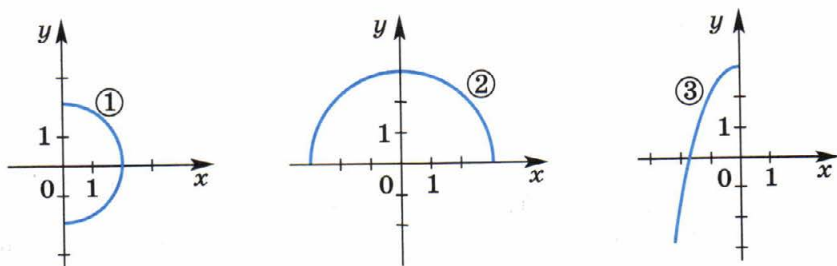


Рис. 5.20

A

756 РАБОТАЕМ С СИМВОЛАМИ Изобразите указанный промежуток на координатной прямой и запишите его обозначение:

- а) $-3 \leq x \leq 2$; г) $x \geq 4$;
- б) $-8 < x < 0$; д) $x \leq 5$;
- в) $-5 \leq x < 5$; е) $x < 0$.

757 На рисунке 5.21 изображён график некоторой функции. Найдите по этому графику:

- а) значение функции, соответствующее значению аргумента, равному -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 4 ;
- б) значение аргумента, при котором значение функции равно -3 ; -1 ; 0 ; 1 ; $1,5$.

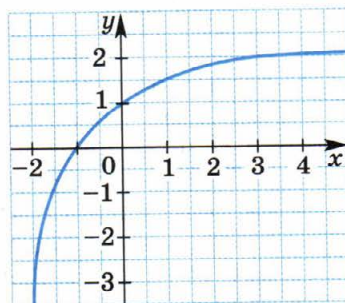


Рис. 5.21

758 На рисунке 5.22 изображён график функции $y = f(x)$. Найдите по этому графику:

- а) $f(0)$; $f(-3)$; $f(1)$;
 б) значения x , при которых $f(x) = 2$;
 $f(x) = 0$; $f(x) = -3$.

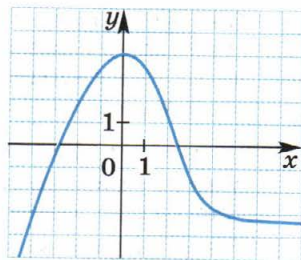


Рис. 5.22

759 ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ Маша посадила подсолнух и в течение 12 недель вела наблюдение за его ростом, измеряя длину стебля в конце каждой недели. Результаты её наблюдений представлены в следующей таблице:

t , нед.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
h , см	20	37	73	100	140	175	200	225	240	250	255	260

Постройте график функции $h = f(t)$, где t — время (нед.), h — длина стебля (см). Используя график, ответьте на вопросы:

- а) Какой примерно была длина стебля через 3,5 недели? через 6,5 недели?
 б) Примерно на какой день длина стебля достигла 50 см; 210 см?
 в) В какую неделю подсолнух рос быстрее всего, а в какую — медленнее всего?
 г) Когда рост растения был интенсивнее — в первые четыре недели или в следующие четыре недели?
 д) Когда подсолнух перерос Машу, если её рост 152 см?

760 МОДЕЛИРУЕМ 1) Велосипедист въехал на небольшую гору. За первую минуту он преодолел при подъёме 250 м, за вторую минуту — 200 м, за третью минуту — 150 м, за четвёртую минуту — 130 м, за пятую минуту — 100 м, за шестую минуту — 80 м. Расстояние s (в метрах), на котором находился велосипедист от основания горы, является функцией времени движения t (в минутах). Постройте график этой функции.

2) Используя график, ответьте на вопросы:

- а) На каком примерно расстоянии от подножия горы находился велосипедист через 2,5 мин? через 4,5 мин? через 6 мин?
 б) За какое примерно время он преодолел расстояние, равное 350 м? равное 800 м?

761 а) На рисунке 5.23 изображён график некоторой функции. Составьте по графику таблицу значений функции на промежутке $[-1; 2]$ с шагом 0,5. Воспроизведите этот график в тетради.

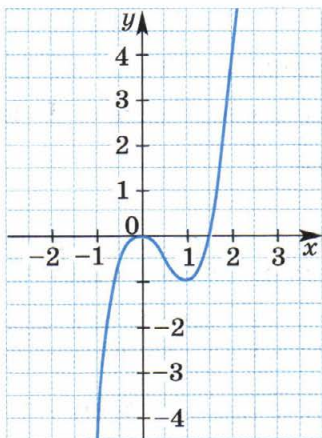


Рис. 5.23

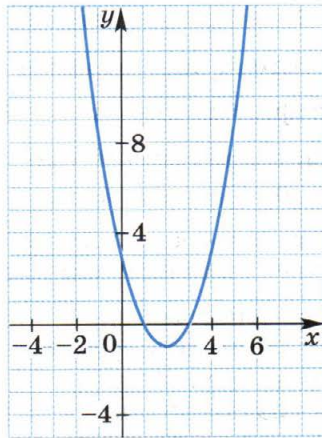


Рис. 5.24

б) Функция задана графиком (рис. 5.24). Составьте таблицу значений функции на промежутке $[-1; 5]$ с шагом 0,5. Воспроизведите этот график в тетради.

762 Составьте таблицу значений функции и постройте её график:

а) $y = x^2 - 1$, где $-3 \leq x \leq 3$;

б) $y = 5 - x^2$, где $-4 \leq x \leq 4$.

763 Постройте график функции:

а) $y = x^2 - 2x$, где $-2 \leq x \leq 4$;

б) $y = -x^2 - 2x + 2$, где $-4 \leq x \leq 2$.

764 а) Какие из точек $(-1; 10)$, $(0; 4)$, $(2; -1)$, $(3; -2)$ принадлежат графику функции $y = -3x + 7$? Запишите координаты ещё двух каких-либо точек, одна из которых принадлежит этому графику, а другая нет.

б) Какие из точек $A(0; -5)$, $B(-1; 3)$, $C(-3; 23)$, $D(2; -3)$ принадлежат графику функции $y = 2x^2 + 1$? Запишите координаты ещё двух каких-либо точек, одна из которых принадлежит этому графику, а другая нет.

765 Пересекает ли график функции ось x , и если пересекает, то в каких точках:

а) $y = x^2 + x - 12$; в) $y = x - x^3$;

б) $y = x^2 + x + 1$; г) $y = x^4 + 1$?

766 В каких точках график функции пересекает координатные оси:

а) $y = 20x + 75$; в) $y = x^2 - 16$;

б) $y = -8x + 1$; г) $y = 2 - x^2$?

ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО (767–768)

767 Учитель дал задание найти координаты точек, в которых график функции $y = \frac{2x-10}{5}$ пересекает ось абсцисс. В классе было получено четыре разных ответа:

- 1) (0; 5) 2) (5; 0) 3) (0; -2) 4) (-2; 0)

Есть ли среди них верный ответ? Как вы думаете, в чём состоят ошибки учащихся, получивших неверный ответ?

768 Известно, что значение функции $y = f(x)$ равно 0 при значениях аргумента, равных 2 и -3. Какое из следующих высказываний верно?

- 1) график функции пересекает ось y в точках (0; 2) и (0; -3)
 2) график функции пересекает ось x в точках (2; 0) и (-3; 0)
 3) $f(2) = -3$

769 Дана функция $y = f(x)$. Известно, что $f(5) = 0$ и $f(0) = -4$. Сформулируйте эти факты на геометрическом языке.

770 Функции заданы формулами

$$y = x^2 + 5, \quad y = x^2 + 5x, \quad y = \frac{x}{x+1}, \quad y = \frac{x+1}{x}.$$

В каждом случае определите, проходит ли график функции через начало координат. Задайте формулой ещё какую-нибудь функцию, график которой проходит через начало координат.

Б

771 Составьте таблицу значений функции и постройте её график:

- а) $y = x^3 - 3x$; б) $y = 3x^2 - x^3$.

772 ■ **РАССУЖДАЕМ** 1) Постройте график функции, заданной формулой $y = x^2 + 1$.

2) Начертите кривую, симметричную этому графику относительно оси x . Эта кривая — график некоторой функции. Задайте эту функцию формулой.

773 ■ **ДОКАЗЫВАЕМ** Докажите, что график функции:

а) $y = 3x^2 + 4$ целиком расположен в верхней полуплоскости;

б) $y = \frac{x^2+5}{x-5}$ не пересекает ось x ;

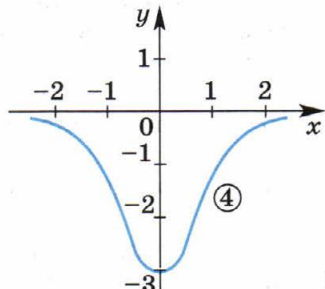
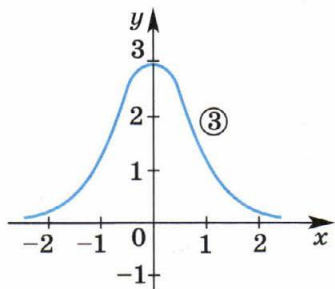
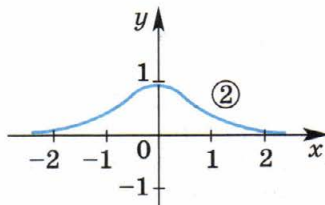
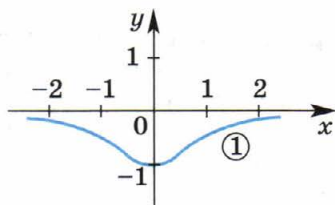
в) $y = 3 - \frac{1}{x}$ не пересекает ось y .

■ РАССУЖДАЕМ (774–775) ■

774 На рисунке 5.25 изображены графики функций

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad y = -\frac{1}{x^2 + 1}, \quad y = \frac{3}{x^2 + 1} \quad \text{и} \quad y = -\frac{3}{x^2 + 1}.$$

Для каждого графика укажите соответствующую формулу.



■ Рис. 5.25

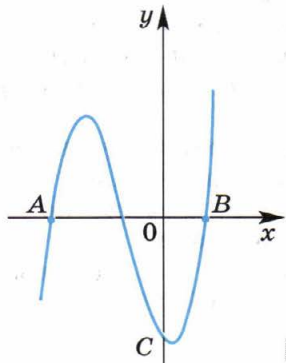
775 а) На рисунке 5.26 изображён график функции

$$y = x^3 + 3x^2 - x - 3.$$

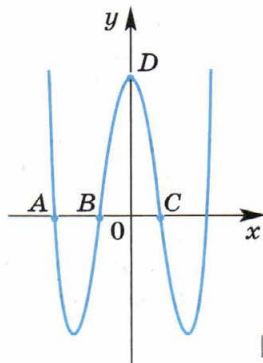
Найдите координаты точек A , B и C .

б) На рисунке 5.27 изображён график функции $y = x^4 - 6x^2 + 5$.

Найдите координаты точек A , B , C и D .



■ Рис. 5.26

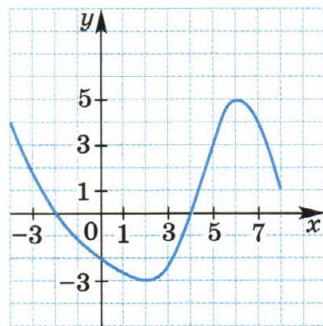


■ Рис. 5.27

5.4 Свойства функций

1 Вспомним, как мы считываем информацию с графиков реальных зависимостей. Например, если мы имеем дело с графиком температуры (см. рис. 5.6), то ищем на нём верхнюю и нижнюю точки — в результате узнаём наибольшее и наименьшее значения температуры. Кроме того, смотрим, где график располагается выше горизонтальной оси, а где — ниже. Тем самым получаем информацию о том, когда температура была положительной, а когда — отрицательной. Наконец, нас интересуют промежутки, на которых график поднимается вверх или опускается вниз, — им соответствуют периоды повышения и понижения температуры.

2 Точно так же график всякой функции, являясь её геометрическим изображением, наглядно отражает все её *свойства*. На рисунке 5.28 изображён график функции $y = f(x)$, областью определения которой является промежуток $[-4; 8]$. Посмотрим, о каких свойствах этой функции говорит её график.



■ Рис. 5.28

У графика есть нижняя точка и верхняя точка. Значит, у функции $y = f(x)$ есть *наибольшее* и *наименьшее значения*. Наименьшее значение этой функции равно -3 , а наибольшее значение равно 5 .

В точках с абсциссами -2 и 4 график пересекает ось x . А это означает, что $f(x) = 0$ при $x = -2$ и $x = 4$. Значения аргумента, при которых функция обращается в нуль, называют *нулями функции*. В данном случае нули функции — это числа -2 и 4 .

При $-4 < x < -2$ и при $4 < x < 8$ график расположен выше оси абсцисс, а при $-2 < x < 4$ он расположен ниже оси абсцисс. Значит, на промежутках $(-4; -2)$ и $(4; 8)$ значения функции *положительны*, а на промежутке $(-2; 4)$ значения функции *отрицательны*.

Если двигаться по оси x слева направо, то можно увидеть, что с увеличением x от -4 до 2 график функции «идёт вниз», т. е. значения функции уменьшаются. Говорят, что на промежутке $[-4; 2]$ *функция убывает*. С увеличением x от 2 до 6 график «идёт вверх», т. е. значения функции увеличиваются. Говорят, что на промежутке $[2; 6]$ *функция возрастает*. На промежутке $[6; 8]$ функция снова убывает.

На рисунке 5.29 изображён график некоторой функции. Как видим, эта кривая при движении слева направо всё время поднимается вверх. Функция возрастает на всей области определения. Такие функции называют *возрастающими*. Функции, которые убывают на всей области определения, называют *убывающими*.

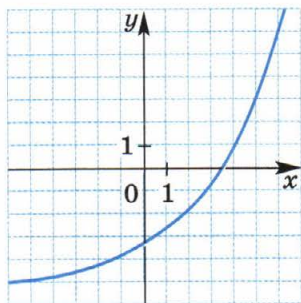


Рис. 5.29

- Откройте учебник на с. 232. По графику, изображённому на рисунке 5.6, выполните следующие задания и в каждом случае расскажите, как рассматриваемое свойство отражается на графике:
 - а) найдите наибольшее и наименьшее значение температуры;
 - б) укажите промежутки времени, когда температура была положительной; отрицательной;
 - в) укажите промежутки времени, когда температура повышалась; понижалась.
- Опираясь на рисунок 5.28, объясните, как определить по графику:
 - а) наибольшее и наименьшее значение функции;
 - б) нули функции;
 - в) промежутки, на которых значения функции положительны; отрицательны;
 - г) промежутки, на которых функция возрастает; убывает.
- На рисунке 5.29 изображён график возрастающей функции. Найдите на рисунке 5.32 (см. с. 254) график убывающей функции. В каком случае мы называем функцию возрастающей, в каком — убывающей?

A

АНАЛИЗИРУЕМ (776–778)

776 На рисунке 5.30 изображён график функции $y = f(x)$, областью определения которой является отрезок $[-2; 2]$. Используя график, ответьте на вопросы:

- 1) Есть ли у функции наибольшее или наименьшее значение, и если есть, то чему оно равно? При каком значении аргумента функция принимает это значение?
- 2) Укажите нули функции.
- 3) Укажите промежутки, на которых функция принимает положительные значения; отрицательные значения.
- 4) Укажите промежутки, где функция возрастает; убывает.

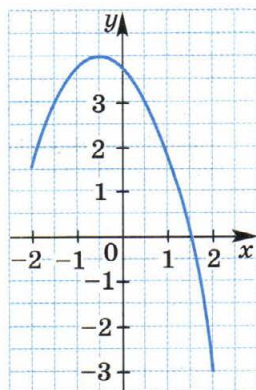


Рис. 5.30

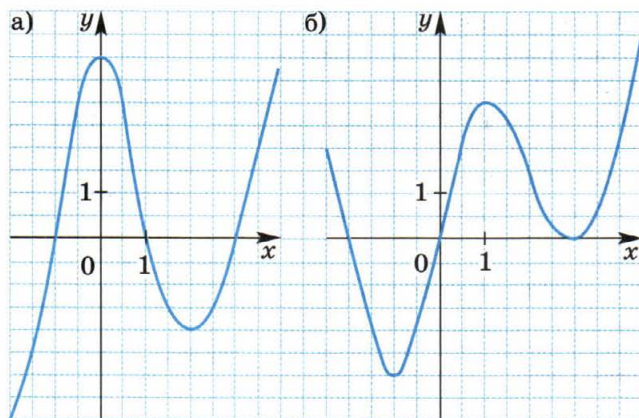


Рис. 5.31

777 На рисунке 5.31 изображены графики функций, определённых на множестве всех чисел. Какие свойства каждой из функций можно выяснить с помощью её графика?

778 Среди графиков, изображённых на рисунке 5.32, найдите график функции, которая возрастает при $x \leq 2$ и убывает при $x \geq 2$.

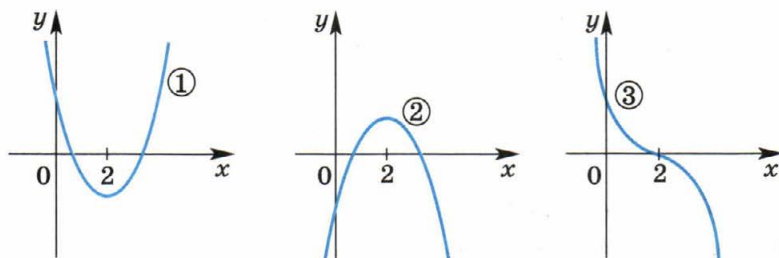


Рис. 5.32

779 Нулями функции $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 28x + 15$ являются числа -3 ; 5 ; $0,5$. Убедитесь в справедливости этого утверждения. Сформулируйте этот факт другими способами, используя слова «график», «значение функции», «уравнение».

Найдите нули функции (780—781).

- 780** а) $y = x^2 - 2x - 8$; в) $y = 3x^2 + x - 2$;
 б) $y = x^2 - 9x$; г) $f(x) = 10 - x^2$.

- 781** а) $f(x) = (x - 1)\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$; в) $f(x) = 10x^4 - 250x^2$;
 б) $f(x) = x^2(x + 0,5)(2x - 3)$; г) $y = 3x^3 - 108x^2$.

782 ■ МОДЕЛИРУЕМ ■ Начертите график какой-нибудь функции, нулями которой являются числа:

а) $-3,5$; 0 ; 4 ; б) -5 ; -1 ; $2,5$; $4,5$.

Для каждой функции укажите промежутки, на которых её значения положительны; отрицательны.

783 Постройте график функции и прочитайте по графику её свойства:

а) $y = x^2$; б) $y = -x^3$; в) $y = |x|$; г) $y = \sqrt{x}$.

Б

784 ■ МОДЕЛИРУЕМ ■ Начертите график какой-нибудь функции, обладающей следующими свойствами:

а) при $x \geq -1$ функция возрастает, а при $x \leq -1$ функция убывает; нулями функции являются числа -2 и 1 ;

б) функция возрастает при $x \leq 2$ и при $5 \leq x \leq 7$; убывает при $2 \leq x \leq 5$ и при $x \geq 7$; при $x = 2$ она принимает наибольшее значение;

в) значения функции положительны при $x < -3$ и при $x > 5$; отрицательны при $-3 < x < 5$; при $x = 0$ она принимает наименьшее значение.

785 ■ ДЕЙСТВУЕМ ПО АЛГОРИТМУ ■ Найдите нули функции:

а) $y = 5x - x^3$; г) $y = x^3 - x^2 + x - 1$;

б) $y = 2x^3 - 6x^2 - 8x$; д) $y = 8x^4 - 125x$;

в) $y = x^3 - x^2 - x + 1$; е) $y = 2x^5 + 54x^2$.

■ АНАЛИЗИРУЕМ И РАССУЖДАЕМ (786–788) ■

786 На рисунке 5.33 построены графики квадратных трёхчленов:

$f(x) = x^2 - 4x + 4$, $g(x) = x^2 - 2x + 4$, $h(x) = 2x^2 - 6x + 4$.

Соотнесите каждый график с формулой.

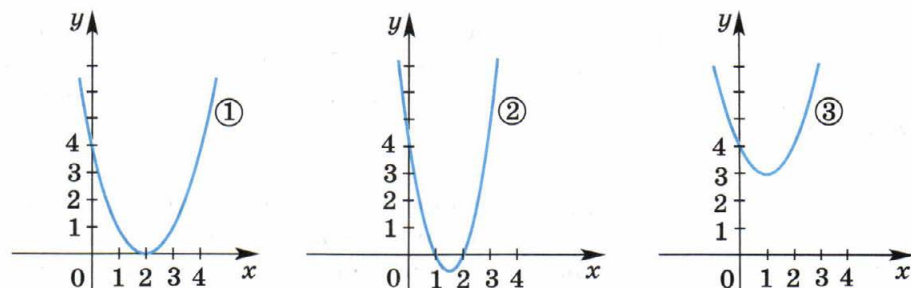


Рис. 5.33

787 График какой из функций изображён на рисунке 5.34:

$$f(x) = 2(x+2)(x-1)(x-3);$$

$$g(x) = 2(x+2)(1-x)\left(x - \frac{7}{2}\right);$$

$$h(x) = 2(x+2)(x-1)\left(x - \frac{7}{2}\right);$$

$$p(x) = (x+2)(x-1)\left(x - \frac{7}{2}\right)?$$

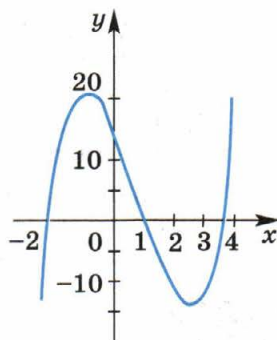


Рис. 5.34

788 Задайте формулой какую-нибудь функцию, нулями которой являются числа:

а) $-3; 1; 7$; б) $-4; \frac{5}{2}; \frac{1}{3}$.

789 Постройте график функции и перечислите её свойства:

а) $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } |x| \leq 1 \\ 1, & \text{если } |x| > 1; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} -8, & \text{если } x < -2 \\ x^3, & \text{если } -2 \leq x \leq 2 \\ 8, & \text{если } x > 2. \end{cases}$

5.5 Линейная функция

1 Пример 1. Условия оплаты временной телефонной связи в одном из регионов РФ таковы:

- Абонентская плата за месяц — 158 р.
- Стоимость 1 минуты — 0,32 р.

Обозначим стоимость услуг телефонной связи за месяц (в р.) через c , количество минут разговора через n . Зависимость стоимости c от количества минут n выражается формулой

$$c = 0,32n + 158.$$

Пример 2. Если тело движется с постоянным ускорением $0,2 \text{ см/с}^2$, а его начальная скорость равна 4 см/с , то зависимость скорости движения v (в см/с) от времени движения t (в с) выражается формулой

$$v = 4 + 0,2t.$$

Пример 3. В баке легкового автомобиля 50 л бензина. На каждый километр пути в среднем расходуется $0,07 \text{ л}$. Количество литров бензина r , которое остаётся в баке после $s \text{ км}$ пути, выражается формулой

$$r = 50 - 0,07s.$$

Формулы, которые мы сейчас записали, по существу различаются только буквами и числовыми коэффициентами. А по структуре они одинаковы.

Таким образом, величины совсем разной природы фактически связаны между собой одной и той же зависимостью. Эти, а также многие другие процессы описываются *линейной функцией*, которая является их общей математической моделью.

Функция, которую можно задать формулой вида $y = kx + l$, где k и l — некоторые числа, называется *линейной*.

Линейная функция — самая простая модель описания реальных процессов. Вы наверняка уже поняли, что представляет собой её график. Так как геометрический образ линейного уравнения $y = kx + l$ на координатной плоскости — это прямая, то **графиком линейной функции является прямая**.

Если $k > 0$, то линейная функция является *возрастающей* (рис. 5.35, а). Если $k < 0$, то линейная функция является *убывающей* (рис. 5.35, б).

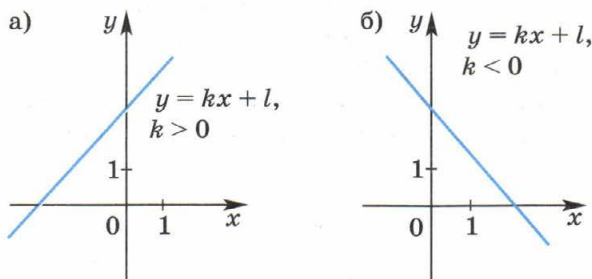


Рис. 5.35

Если $l = 0$, то мы получаем формулу $y = kx$.

График функции $y = kx$ — это прямая, проходящая через начало координат.

Многие известные вам реальные процессы описываются этим видом линейной функции. Так, зависимость стоимости ткани p от её длины l выражается формулой $p = cl$, где c — цена одного метра ткани. Зависимость массы тела m от его объёма V выражается формулой $m = \rho V$, где ρ — плотность. Зависимость пути s , пройденного телом с постоянной скоростью за время t , выражается формулой $s = vt$.

Во всех приведённых примерах величины связаны прямо пропорциональной зависимостью. Поэтому и линейную функцию $y = kx$, где $k \neq 0$, называют *прямой пропорциональностью*.

Если $k = 0$, то формула $y = kx + l$, задающая линейную функцию, имеет вид $y = l$. Такая линейная функция принимает одно и то же значение при любом x . Она называется *постоянной функцией* или *константой* (от латинского слова constants — постоянная).

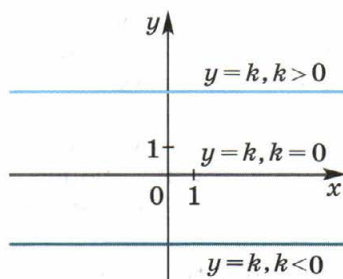


График постоянной функции — это прямая, параллельная оси x (или сама ось x) (рис. 5.36).

Рис. 5.36

2. Выясним важное свойство линейной функции. Для этого обратимся к уже знакомому вам графику роста мальчика с рождения до 12 лет (см. рис. 5.1). Возьмём фрагмент этого графика, показывающий, как рос мальчик с 6 до 10 лет (рис. 5.37, а).

Из графика видно, что скорость его роста не была постоянной: в первые два года он рос быстрее, чем в следующие два. С 6 до 8 лет он вырос на 12 см, а с 8 до 10 лет — только на 6 см.

А как выглядел бы график, если бы с 8 до 10 лет мальчик рос с такой же скоростью, как и с 6 до 8 лет? Нетрудно догадаться, что в этом случае вместо ломаной, состоящей из двух звеньев, мы получили бы отрезок прямой (рис. 5.37, б). Вообще *любой процесс, протекающий с постоянной скоростью, описывается линейной функцией*. И все точки графика, изображающего этот процесс, лежат на прямой.

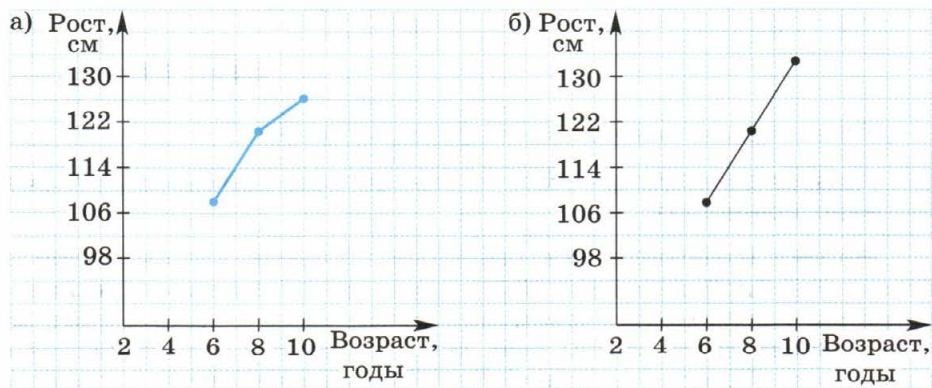


Рис. 5.37

3. Линейную функцию часто используют в статистике. Например, понятно, что нет жёсткой связи между весом и ростом человека —

ведь и при одинаковом росте вес может быть разным. Но всё же общая тенденция такова: чем выше человек, тем больше его вес.

На рисунке 5.38, а представлены данные о весе и росте двадцати мужчин. По оси абсцисс отложен рост (в см), а по оси ординат — вес (в кг).

Хотя точки достаточно разбросаны, всё же можно провести прямую, около которой группируется значительная их часть. Это можно сделать, просто приложив к чертежу линейку и расположив её при этом каким-либо подходящим способом (рис. 5.38, б).

Проведённая прямая позволяет, например, прогнозировать наиболее типичный вес при данном росте мужчины.

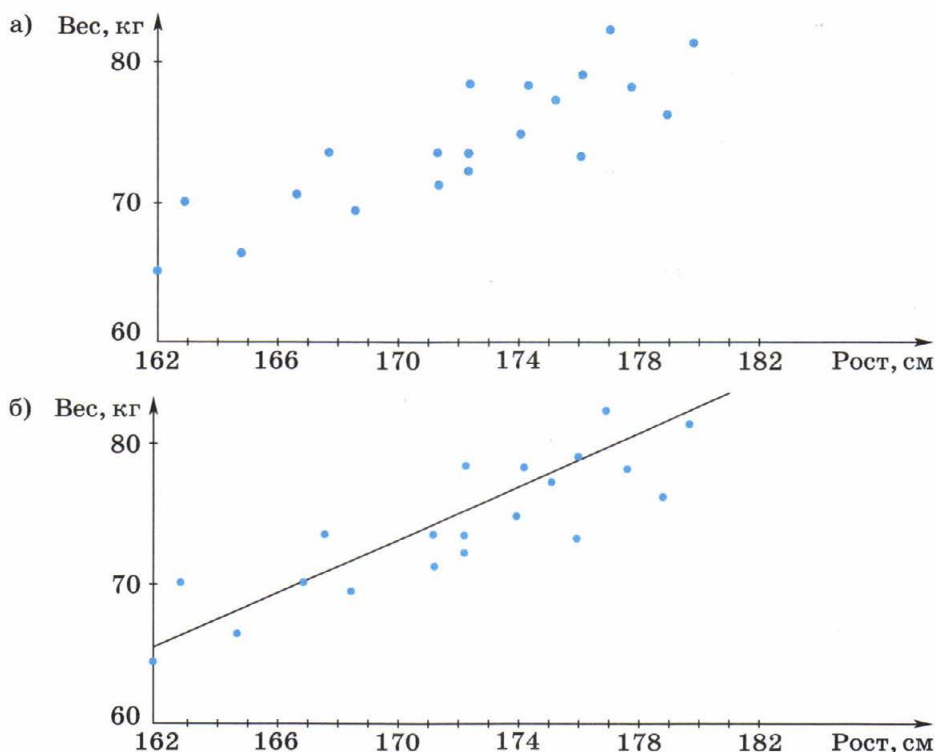


Рис. 5.38

Такие прямые часто называют *аппроксимирующими* (от латинского слова *proxima* — приближение). Заметим, что в математике существуют специальные методы расчётов аппроксимирующих прямых, однако и приём, с которым вы познакомились, даёт вполне разумное приближение.

- Какие из функций, заданных формулами $y = 3x - 10$, $y = \frac{8}{x}$, $y = x^2 + 1$, $y = -3x$, $y = x^3$, $y = 15$, являются линейными (обоснуйте ответ)? Что является графиком линейной функции?
- Какую линейную функцию называют прямой пропорциональностью и какую — константой? Среди функций из предыдущего задания найдите прямую пропорциональность и константу; покажите схематическое расположение графиков этих функций на координатной плоскости.
- Среди линейных функций, заданных формулами $y = -5x + 1$, $y = \frac{1}{3}x$, $y = -4x$, $y = 2x - 2$, найдите возрастающие функции и убывающие функции. Покажите схематически, как расположены графики этих функций на координатной плоскости.
- На рисунке 5.39 изображены графики движения двух спортсменов (А и Б), участвовавших в соревнованиях по спортивной ходьбе. Кто из них шёл с постоянной скоростью?
- Для каких из множеств точек (рис. 5.40, а–г) можно подобрать аппроксимирующую прямую, а для каких нельзя?

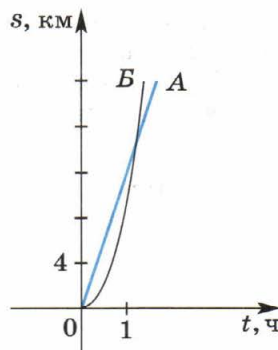


Рис. 5.39

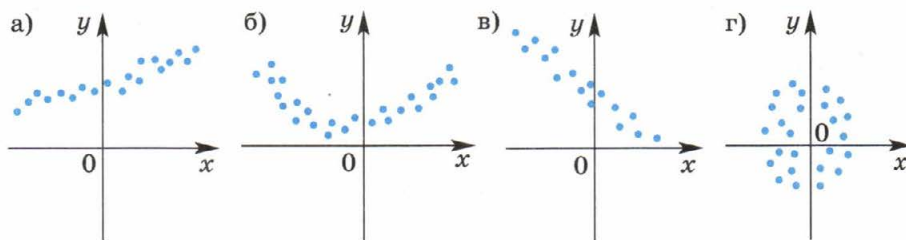


Рис. 5.40

А

- 790** Сумма углов выпуклого многоугольника, имеющего n сторон, вычисляется по формуле $M = 180n - 360$. Объясните, почему эта функция является линейной. Укажите область определения функции. Возрастающей или убывающей является функция? Найдите сумму углов выпуклого многоугольника при $n = 3$; 4; 10.

791 Николай заработал в каникулы 1000 р., работая на почте. Он тратит эти деньги в среднем по 25 р. в день. Запишите формулу, выражающую зависимость оставшейся у него суммы денег y от числа прошедших дней x . Объясните, почему эта функция является линейной. Укажите область определения функции. Возрастающей или убывающей является функция? Найдите значение функции при $x = 1; 10; 25$. В каждом случае объясните с точки зрения условия, что вы находите.

792 Дана линейная функция $f(x) = 100x - 2$.

а) Найдите $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(0,3)$, $f(-2,4)$.

б) Найдите значение x , при котором $f(x) = 100$, $f(x) = -1$, $f(x) = 0$, $f(x) = -5$.

793 Найдите значение линейной функции $f(x) = -3x + 0,5$ при указанных значениях аргумента и заполните таблицу:

x	-2,5	-1	0	1,5	8	10
$f(x)$						

794 Постройте график линейной функции. В каждом случае укажите:

1) возрастающей или убывающей является функция;

2) при каких значениях x значения функции равны 0; больше 0; меньше 0.

а) $y = -0,3x + 2$; г) $y = 1,2x$;

б) $y = -2x + 1,5$; д) $y = 1,5x - 2$;

в) $y = -0,7x$; е) $y = -0,5x - 1$.

795 Постройте график функции:

а) $y = 3x - 1$, где $-3 \leq x \leq 3$;

б) $y = -2x + 4$, где $x \geq 0$;

в) $y = 0,5x + 3$, где $-6 \leq x \leq 2$;

г) $y = -3x - 2$, где $x \leq -\frac{2}{3}$.

АНАЛИЗИРУЕМ (796–797)

796 На рисунке 5.41 изображены графики линейных функций. Соотнесите каждую из них с одной из формул:

$$y = 2x + 3; y = -2x; y = \frac{1}{2}x + 3; y = -2x + 3.$$

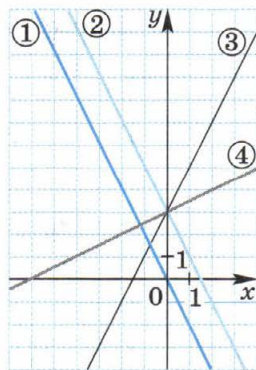


Рис. 5.41

797 В одной системе координат постройте графики линейных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и определите значения x , при которых $f(x) = g(x)$; $f(x) > g(x)$; $f(x) < g(x)$:

а) $f(x) = 2x - 5$, $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$;

б) $f(x) = x + 3$, $g(x) = -\frac{1}{3}x$.

798 ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ а) У вас имеется 10 р. и есть два способа увеличивать эту сумму: ежедневно добавлять к ней 5 р. или ежедневно добавлять к ней 2 р. Составьте для каждого случая формулу зависимости имеющейся суммы денег y от числа дней x . В каком случае сумма будет увеличиваться быстрее? В одной системе координат постройте прямые, которым принадлежат точки графика каждой из функций, и отметьте эти точки для $1 \leq x \leq 7$.

б) Андрей планирует поработать во время летних каникул, и у него есть две возможности. На работе А он будет получать 50 р. в день. На работе В он в первый день получит 25 р., а затем ежедневно будет получать 50 р. Какой вариант выгоднее? Составьте формулу зависимости полученной суммы денег y от числа рабочих дней x для вариантов А и В. В одной системе координат постройте прямые, которым принадлежат точки графика каждой из функций, и отметьте эти точки для $1 \leq x \leq 5$. Существуют ли значения x , при которых значения y равны?

АНАЛИЗИРУЕМ (799–801)

799 На рисунке 5.42 изображён график некоторого процесса. Какая часть графика соответствует:

- а) самому быстрому росту;
б) самому медленному росту;

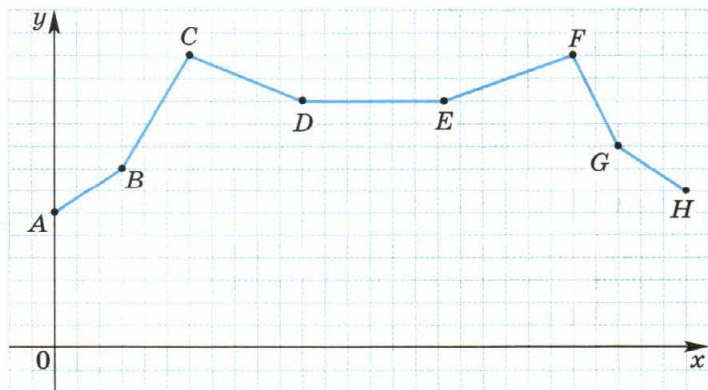


Рис. 5.42

- в) самому быстрому убыванию;
 г) самому медленному убыванию;
 д) нулевой скорости изменения?

800 На рисунке 5.43 изображён график следующего процесса: ванну наполнили водой и через некоторое время воду слили. Опишите по графику, как протекал процесс. Для каждого прямолинейного участка графика определите, с какой скоростью наливалась или выливалась вода.

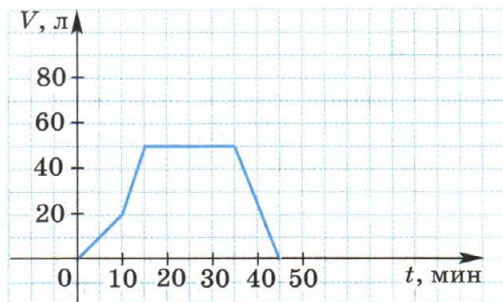


Рис. 5.43

801 На каком из рисунков (рис. 5.44) изображён график движения пешехода, который шёл с постоянной скоростью? Найдите скорость движения этого пешехода.

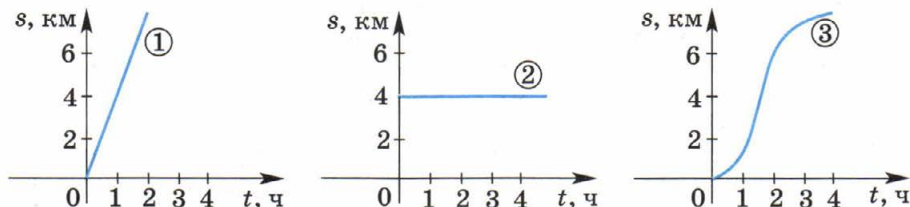


Рис. 5.44

802 Изобразите график описанного процесса: «Альпинист поднимается по отвесной скале. Он начал подъём на высоте 4 м от земли. В течение 3 мин он поднимался со скоростью 0,5 м/мин, затем в течение 2 мин спускался со скоростью 0,3 м/мин, а затем в течение 2 мин поднимался со скоростью 1,5 м/мин».

803 Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} -\frac{1}{2}x, & \text{если } x \leq 0 \\ 2x, & \text{если } x > 0; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} 2, & \text{если } x \leq 1 \\ 2x, & \text{если } x > 1; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \leq 0 \\ -x+1, & \text{если } x > 0; \end{cases}$

г) $y = \begin{cases} -x-1, & \text{если } x \leq 1 \\ -2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

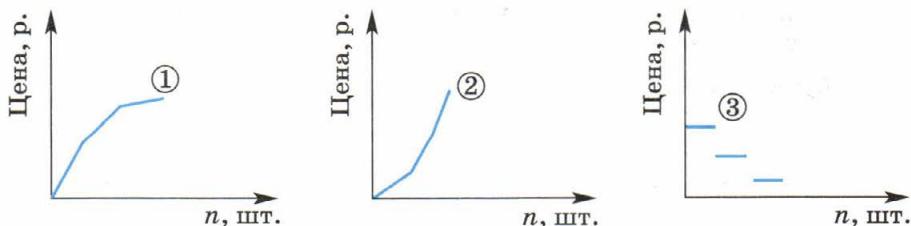
Б

- 804** Муравей ползёт по шесту для флага, воткнутому вертикально в землю. Длина шеста 4 м. Муравей начал свой путь в 20 см от земли и ползёт вверх с постоянной скоростью 40 см/мин.
- а) Задайте формулой расстояние s , на котором находится муравей от земли, как функцию времени его движения t .
 - б) Укажите область определения этой функции.
 - в) Постройте график функции, выбрав удобные единицы на осях.
 - г) Определите по графику, на какой высоте от земли муравей будет через 3 мин и через сколько минут он доползёт до вершины шеста.

■ ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ (805–806) ■

- 805** Скорость звука в воздухе примерно 0,3 км/с. Во время грозы вы сначала видите молнию и лишь через некоторое время слышите гром. Задайте формулой функцию $y = f(x)$, где:
- а) y — расстояние, на котором вы находитесь от места удара молнии, x — время между вспышкой молнии и громом;
 - б) y — время между вспышкой молнии и громом, x — расстояние, на котором вы находитесь от места удара молнии. Постройте график каждой функции.

- 806** ■ АНАЛИЗИРУЕМ ■ Оптовый магазин продаёт тетради, устанавливая цену одной тетради таким образом: при покупке от 1 до 50 тетрадей — 2 р. за тетрадь, следующие 50—100 тетрадей — 1,5 р. за тетрадь и, наконец, каждая тетрадь сверх 100 штук — 1 р. за тетрадь. Какой из графиков (рис. 5.45) может быть использован для определения стоимости покупки n тетрадей?



■ Рис. 5.45

807 Постройте график функции:

$$\text{а) } y = \begin{cases} -\frac{x}{3}, & \text{если } x \leq -1 \\ \frac{1}{3}, & \text{если } -1 < x \leq 1 \\ \frac{x}{3}, & \text{если } x > 1; \end{cases} \quad \text{б) } y = \begin{cases} \frac{x-2}{2}, & \text{если } x \leq -2 \\ -2, & \text{если } -2 < x \leq 2 \\ \frac{x-6}{2}, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

808 На рисунке 5.46 построен график функции

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 3, & \text{если } x \leq 2 \\ x - 4, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

Стрелка, поставленная на одном из лучей, означает, что точка $(2; -2)$ не принадлежит графику. Ответьте на вопросы:

а) Какова область определения функции?

б) Чему равно значение функции при $x = -1; 0; 1; 2; 3$?

в) Сколько нулей имеет функция?

г) На каких промежутках функция возрастает? убывает?

д) На каких промежутках функция положительна? отрицательна?

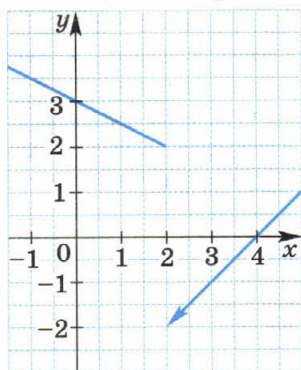


Рис. 5.46

809 Постройте график функции и опишите её свойства:

$$\text{а) } y = \begin{cases} 2x + 3, & \text{если } x \geq 0 \\ -x + 1, & \text{если } x \leq 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } y = \begin{cases} 1 - 3x, & \text{если } x \leq 1 \\ x + 2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

810 ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ

1) Самолёт начал снижение на высоте 8500 м. На графике (рис. 5.47) показано изменение его высоты над землёй в первые 20 мин снижения. Перечертите график в тетрадь и подберите

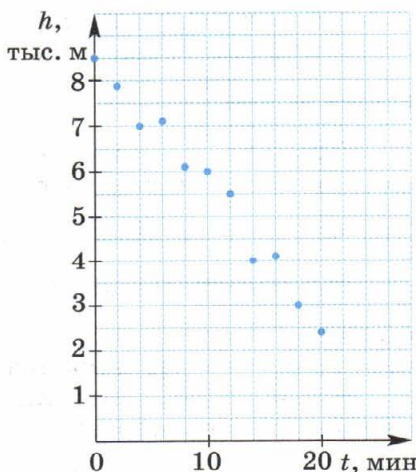


Рис. 5.47

прямую, вокруг которой укладываются эти точки. Определите, сколько примерно минут длилось снижение самолёта и какова была средняя скорость снижения (в м/мин).

- 811** На графике (рис. 5.48) показаны данные о числе туристов, для которых фирма «Отпуск» организовала путешествие за период с 2004 по 2012 г. Перечертите этот график в тетрадь и проведите прямую, аппроксимирующую эти данные. Если эта тенденция сохранится, то сколько путешествий можно ожидать в 2015 г.?

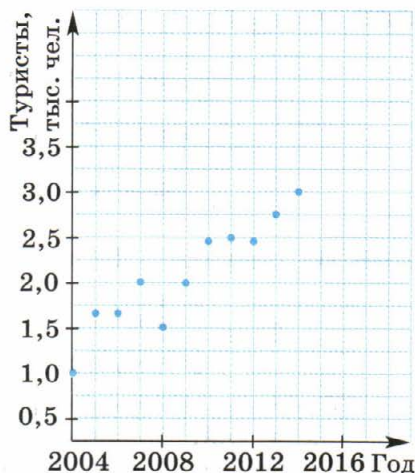


Рис. 5.48

5.6 Функция $y = \frac{k}{x}$ и её график

- 1** **Пример 1.** Пешеходу надо пройти 12 км. Если он будет идти со скоростью v км/ч, то зависимость времени t (в ч), которое он затратит на весь путь, от скорости движения выражается формулой $t = \frac{12}{v}$.

Пример 2. Площадь прямоугольника равна 60 см^2 , а одно из его измерений равно a см. Тогда второе измерение можно найти по формуле $b = \frac{60}{a}$.

Пример 3. Количество товара m , которое можно купить на одну и ту же сумму денег в 500 р., зависит от его цены P (в р.). Эта зависимость выражается формулой $m = \frac{500}{P}$.

Все перечисленные формулы имеют вид $y = \frac{k}{x}$, где k — число, отличное от нуля. И общей моделью таких и многих других реальных процессов является функция, которая задаётся этой формулой.

Вы, конечно, заметили, что в приведённых выше примерах величины связаны обратно пропорциональной зависимостью. Следовательно, и функцию, которая задана формулой $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называют *обратной пропорциональностью*.

Выражение $\frac{k}{x}$ имеет смысл при всех $x \neq 0$, поэтому область определения функции $y = \frac{k}{x}$ — множество всех чисел, кроме 0.

2 Выясним, что представляет собой график функции $y = \frac{k}{x}$. Рассмотрим отдельно случаи, когда $k > 0$ и когда $k < 0$. Построим, например, график функции $y = \frac{12}{x}$. Таблицу значений функции составим в два этапа: сначала возьмём несколько положительных значений аргумента, а затем несколько противоположных им отрицательных значений.

x	1	1,5	2	3	4	6	8	12
y	12	8	6	4	3	2	1,5	1
x	-1	-1,5	-2	-3	-4	-6	-8	-12
y	-12	-8	-6	-4	-3	-2	-1,5	-1

Отметим на координатной плоскости точки, координаты которых помещены в таблице, и соединим их плавными линиями — по отдельности для положительных и для отрицательных значений аргумента. Получим

график функции $y = \frac{12}{x}$ (рис. 5.49).

Вы видите, что график состоит из двух ветвей. Одна из них расположена в первой координатной четверти, а другая — в третьей.

Обратите внимание: график функции $y = \frac{12}{x}$ не пересекает координатные

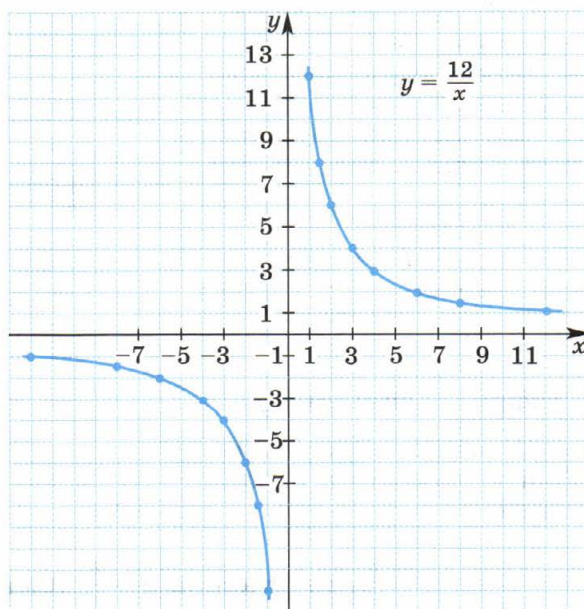


Рис. 5.49

оси; на графике нет ни точки с абсциссой $x = 0$, ни точки с ординатой $y = 0$.

Укажем ещё одну важную особенность графика. Чем больше по модулю значение аргумента, тем меньше отличаются от нуля значения функции $y = \frac{12}{x}$. Например, если $x = 10$, то $y = 1,2$; если $x = 100$, то $y = 0,12$; если $x = 1000$, то $y = 0,012$. Поэтому ветви графика всё больше приближаются к оси x , однако никогда не сливаются с ней. Чем ближе к нулю значения аргумента, тем больше по модулю значения функции $y = \frac{12}{x}$. Например, если $x = 0,1$, то $y = 120$; если $x = 0,01$, то $y = 1200$; если $x = 0,001$, то $y = 12\,000$. Поэтому ветви гиперболы всё больше приближаются к оси y , но никогда с ней не сливаются.

Такой же вид имеет график функции $y = \frac{k}{x}$ при любом $k > 0$.

Теперь построим график функции $y = \frac{k}{x}$ для $k < 0$, например график функции $y = -\frac{12}{x}$. Он тоже состоит из двух ветвей, но в этом случае они расположены во второй и четвёртой координатных четвертях (рис. 5.50).

График функции $y = \frac{k}{x}$ при любом $k < 0$ имеет такой же вид, что и график функции $y = -\frac{12}{x}$.

График функции $y = \frac{k}{x}$ называется *гиперболой*. Гипербола состоит из двух ветвей.

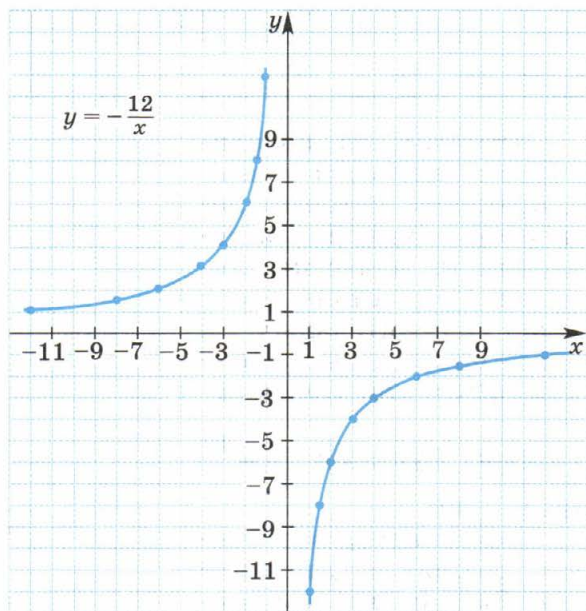


Рис. 5.50

Если $k > 0$, то функция $y = \frac{k}{x}$ убывает на каждом из двух промежутков области определения. Если $k < 0$, то функция $y = \frac{k}{x}$ на каждом из этих промежутков возрастает.

- Какая из функций, заданных формулами $y = 3x - 1$, $y = \frac{3}{x}$, $y = -\frac{x}{5}$, $y = \frac{2}{x^2}$, является обратной пропорциональностью (обоснуйте ответ)? Что является областью определения обратной пропорциональности?
- Опираясь на график функции $y = \frac{12}{x}$, изображённый на рисунке 5.49, опишите особенности графика функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$.
- Чем отличается график функции $y = -\frac{12}{x}$ (см. рис. 5.50) от графика функции $y = \frac{12}{x}$?
- В каких координатных углах расположен график функции: $y = \frac{6}{x}$; $y = -\frac{3}{x}$; $y = -\frac{1,5}{x}$; $y = \frac{2,5}{x}$? Как называется график функции $y = \frac{k}{x}$?
- Укажите промежутки возрастания или убывания функций $y = \frac{12}{x}$ и $y = -\frac{12}{x}$ (см. рис. 5.49, 5.50).

A

812 Функция задана формулой $y = \frac{6}{x}$.

а) Заполните таблицу:

x	1	2	3	4	6	-1	-2	-3	-4	-6
y										

б) Постройте график функции.

в) Определите промежуток, на котором значения функции положительны; отрицательны.

813 Функция задана формулой $f(x) = -\frac{6}{x}$.

а) Заполните таблицу:

x	1	2	3	4	6	-1	-2	-3	-4	-6
$f(x)$										

б) Постройте график функции.

в) Определите промежуток, на котором $f(x) > 0$; $f(x) < 0$.

814 Постройте график функции $y = \frac{8}{x}$. По графику определите:

- а) возрастает или убывает функция при $x > 0$; при $x < 0$;
- б) на каком промежутке значения функции отрицательны;
- в) значение y при $x = 2,5$; $-2,5$;
- г) значение x , при котором $y = 5$; -5 .

815 Постройте график функции $f(x) = -\frac{4}{x}$. По графику определите:

- а) $f(5)$; $f(-5)$; $f(8)$; $f(-8)$;
- б) значение x , при котором $f(x) = 8$; $f(x) = -8$; $f(x) = 6$; $f(x) = -6$;
- в) возрастает или убывает функция при $x > 0$; при $x < 0$;
- г) на каком промежутке значения функции положительны.

■ АНАЛИЗИРУЕМ (816–817) ■

816 Графиком какой из функций: $y = \frac{1}{3}x$, $y = \frac{x}{3}$, $y = \frac{3}{x}$ — является гипербола? Постройте эту гиперболу.

817 В одной системе координат постройте графики функций:

$y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{4}{x}$, $y = -\frac{2}{x}$, $y = -\frac{8}{x}$. Как зависит расположение графика функции $y = \frac{k}{x}$ от модуля коэффициента k ?

818 ■ ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО ■ Какое из следующих утверждений верно?

При $k > 0$ график функции $y = \frac{k}{x}$ расположен:

- 1) в первой и третьей координатных четвертях
- 2) во второй и четвёртой координатных четвертях
- 3) в первой и второй координатных четвертях

819 В одной системе координат постройте графики функций и найдите координаты их точек пересечения:

а) $y = -\frac{1}{x}$ и $y = -x$; б) $y = \frac{2}{x}$ и $y = x + 1$.

820 Не выполняя построения, определите, какие из точек $(5; 3)$, $(10; -2)$, $(-0,3; -50)$, $(-0,4; 50)$ принадлежат графику функции:

а) $y = \frac{15}{x}$; б) $y = -\frac{20}{x}$.

821 Пусть a и b — стороны прямоугольника, площадь которого равна 10 см^2 . Задайте формулой зависимость стороны a от стороны b . Постройте график зависимости a от b .

Б

- 822** 1) Найдите координаты точек с равными абсциссой и ординатой, через которые проходит график функции: а) $y = \frac{16}{x}$;
 б) $y = \frac{3}{x}$.
 2) Определите координаты точек, в которых:
 а) биссектриса I и III координатных углов пересекает график функции $y = \frac{6}{x}$;
 б) биссектриса II и IV координатных углов пересекает график функции $y = -\frac{15}{x}$.

- 823** Известно, что точка $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right)$ принадлежит графику функции $y = \frac{k}{x}$. Найдите значение k . Принадлежит ли этому графику точка $\left(\sqrt{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$? $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right)$? $\left(2\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$?

- 824** Найдите координаты точек, в которых гипербола $y = \frac{12}{x}$ пересекается с прямой: а) $y = 0,5$; б) $y = -0,3$.

■ АНАЛИЗИРУЕМ И РАССУЖДАЕМ (825–827) ■

- 825** Найдите координаты какой-нибудь точки, принадлежащей графику функции $y = \frac{5}{x}$ и находящейся от оси x на расстоянии, меньшем чем 0,1; 0,01.
- 826** Пользуясь графиком на рисунке 5.49, определите, при каких значениях x : а) $y > 4$; б) $y \geq -6$; в) $y < 3$; г) $y \leq -3$; д) $-1 \leq y \leq 1$.
- 827** а) Постройте график функции $y = f(x)$ и определите, при каких значениях a прямая $y = a$ имеет с графиком одну общую точку, если $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{при } x \leq 2 \\ \frac{8}{x} & \text{при } x > 2. \end{cases}$
- б) Постройте график функции $y = f(x)$ и определите, при каких значениях a прямая $y = a$ имеет с графиком две общие точки, если $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{при } x \leq 2 \\ -\frac{6}{x} & \text{при } x > 2. \end{cases}$

5.7 Целая и дробная части числа

(Для тех, кому интересно)

Среди графиков функций встречаются очень красивые и необычные. Прежде чем познакомиться с двумя интересными графиками, уточним, что же мы называем *целой частью числа* и *дробной частью числа*.

Ясно, например, что целая часть числа 3,7 равна 3, а дробная часть этого числа равна 0,7. Понятно также, что целая часть числа 9 равна 9, а дробная часть этого числа равна 0. А что считать целой и дробной частью отрицательного числа, например числа $-4,8$?

Определение

Целой частью числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x .

Из определения следует, что целая часть отрицательного числа $-4,8$ равна -5 , а целая часть числа 0 равна 0.

Целая часть числа x имеет специальное обозначение: $[x]$. Используя это обозначение, запишем рассмотренные примеры:

$$[3,7] = 3; [9] = 9; [0] = 0; [-4,8] = -5.$$

Определение

Дробной частью числа x называют разность между числом x и его целой частью.

Дробная часть числа x тоже имеет специальное обозначение: $\{x\}$. Таким образом, $\{x\} = x - [x]$.

Найдём дробную часть числа $-4,8$. По определению будем иметь $\{-4,8\} = -4,8 - [-4,8] = -4,8 - (-5) = -4,8 + 5 = 0,2$.

А теперь посмотрим, как выглядят графики функций $y = [x]$ и $y = \{x\}$.

Сначала построим график функции $y = [x]$. Если $0 \leq x < 1$, то $[x] = 0$. Значит, на промежутке $[0; 1)$ график функции $y = [x]$ совпадает с прямой $y = 0$. Однако $[1] = 1$, значит, при $x = 1$ график совершает скачок. Чтобы показать это, на графике ставят стрелку (рис. 5.51, а).

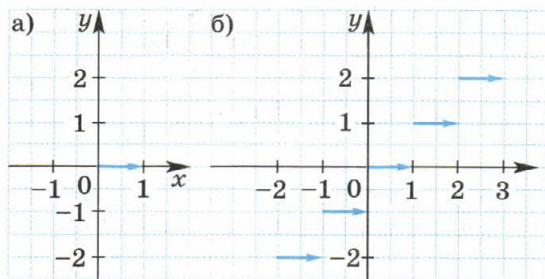


Рис. 5.51

Далее, если $1 \leq x < 2$, то $[x] = 1$, т. е. на промежутке $[1; 2)$ значения y снова будут постоянны, а при $x = 2$ будет новый скачок графика.

Так, рассматривая последовательно промежутки области определения, мы построим график функции $y = [x]$, состоящий из горизонтальных «ступенек» (рис. 5.51, б).

А что представляет собой график функции $y = \{x\}$? Построим его тоже «по кусочкам», воспользовавшись тем, что $\{x\} = x - [x]$.

Если $0 \leq x < 1$, то $[x] = 0$. Значит, при $0 \leq x < 1$ $\{x\} = x - 0$, и график на этом промежутке совпадёт с прямой $y = x$ (рис. 5.52, а).

Если $1 \leq x < 2$, то $[x] = 1$. Значит, при $1 \leq x < 2$ $\{x\} = x - 1$, и график на этом промежутке совпадёт с прямой $y = x - 1$.

Продолжая рассуждения, мы каждый раз будем получать одинаковые отрезки прямых (со стрелкой в правом конце), исходящие из целых точек на оси x , наклонённые к оси под углом 45° . (Проверьте это самостоятельно не только для положительных, но и для отрицательных промежутков области определения.) Получился очень неожиданный график (рис. 5.52, б).

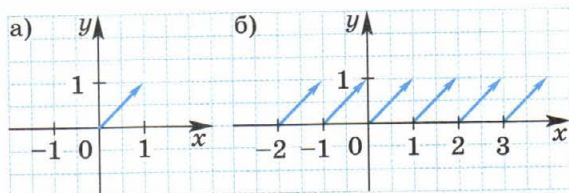


Рис. 5.52

828 а) Найдите целую часть числа: $7,5$; $25,11$; -14 ; $3\frac{1}{3}$.

б) Найдите дробную часть числа: $19,25$; $2\frac{5}{7}$; $-3,9$; $-45\frac{2}{7}$; 120 .

829 Найдите $[x]$ и $\{x\}$, если $x = 6$; $10,8$; $-10,8$; $-6\frac{3}{4}$; -30 .

830 При каких значениях x :

а) $[x] = 5$;

б) $[x] = -3$?

831 Укажите несколько значений x , для которых $\{x\} = \frac{1}{2}$.

Постройте график функции (832—835).

832 а) $y = [x - 1]$; в) $y = [2x]$;

б) $y = [x] - 2$; г) $y = [x] + \frac{1}{2}$.

833 а) $y = -[x]$; б) $y = [-x]$; в) $y = [|x|]$.

834 а) $y = -\{x\}$; б) $y = \{-x\}$.

835 $y = [x] + \{x\}$.

Дополнительные задания

● Реальные зависимости

- 836** Туристы ездили на экскурсию из города A в город B . График движения экскурсионного автобуса изображён на рисунке 5.53. В какой из промежутков времени — первые два часа, следующие два часа или последние два часа поездки — скорость автобуса была наибольшей?

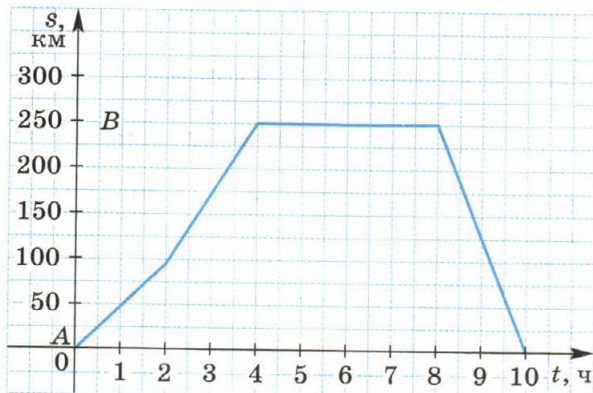


Рис. 5.53

- 837** На шоссе, ведущем в гору, через каждые 5 км установлен знак с отметкой высоты над уровнем моря. В таблице приведены данные на первые 20 км этой дороги.

Расстояние от начала подъёма, км	0	5	10	15	20
Высота над уровнем моря, м	685	688	688	695	690

- Отметьте указанные точки в координатной плоскости.
- Укажите промежутки, на которых высота растёт; не изменяется; снижается.
- На каком участке шоссе высота над уровнем моря увеличивается с наибольшей скоростью? Какова средняя скорость её увеличения на этом участке (число метров на каждый километр пути)?

- 838** Два спортсмена, Пётр и Иван, во время тренировки пробежали 20 км. Графики их бега представлены на рисунке 5.54. Используя графики, определите:

- на сколько меньше времени затратил на всю дистанцию Иван;

- б) сколько километров пробежал каждый из них за 30 мин тренировки; за 50 мин тренировки;
- в) кто из них бежал быстрее на отрезке дистанции от 8-го до 16-го километра;
- г) кто из них бежал быстрее в течение второго получаса тренировки;
- д) какова была средняя скорость каждого спортсмена на дистанции (выразите её в м/мин).

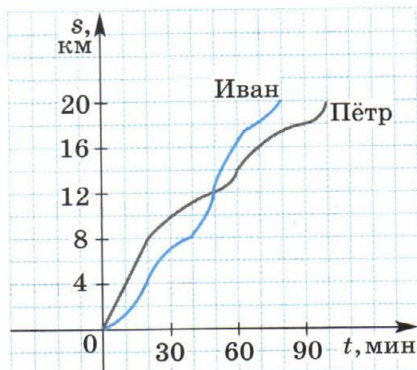


Рис. 5.54

- 839** Телефонная компания предлагает на выбор две различные схемы начисления ежемесячной платы за разговоры (рис. 5.55). При одной схеме — поминутная оплата, без абонентской платы; при другой схеме — абонентская плата плюс поминутная оплата разговоров. Используя график, ответьте на вопросы:

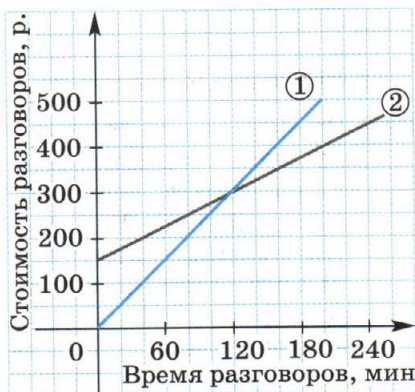


Рис. 5.55

- а) Какая из предложенных схем включает абонентскую плату, а какая не включает?

- б) При какой схеме оплаты стоимость минуты разговора меньше?

- в) Какой из этих двух схем выгоднее воспользоваться, если абонент планирует расходовать на телефонные разговоры ежемесячно не более 200 р.? от 350 до 400 р.? 300 р.?

- г) Какой из этих двух схем выгоднее воспользоваться, если абонент планирует разговаривать по телефону в месяц более 3 ч? не более 1 ч? 2 ч?

- 840** На рисунке 5.56 изображён график нормального кровяного давления человека, которое периодически меняется от систолического (в момент выталкивания крови из сердца в артерии) до диастолического (при поступлении крови из вен в сердце). Используя график, определите:

- а) максимальный уровень давления;
- б) минимальный уровень давления;

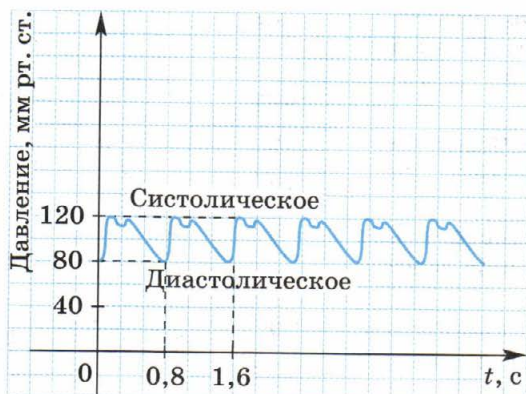


Рис. 5.56

в) разницу между систолическим и диастолическим давлением;
 г) за какое время происходит одно полное колебание давления; какое время проходит между двумя соседними максимальными значениями давления;
 д) сколько полных колебаний давления совершается за одну минуту (число таких колебаний соответствует пульсу).

● Функции и графики

841 Зависимость массы m (в г) деревянного куба от длины x (в см) его ребра выражается формулой $m = 0,7x^3$. Постройте график этой зависимости. По графику найдите:

- а) примерную массу куба, ребро которого равно 2,5 см;
- б) примерную длину ребра куба, масса которого 8 г.

842 Функция $y = f(x)$ задана графически (рис. 5.57). Расположите в порядке возрастания её значения: $f(-3)$, $f(0)$, $f(2,5)$, $f(4,5)$.

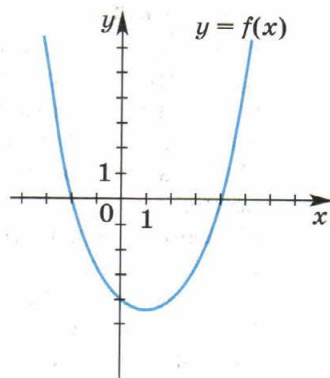


Рис. 5.57

843 Какие из графиков (рис. 5.58) могут служить графиками функций?

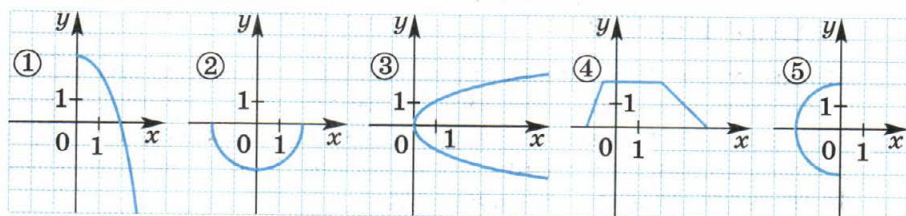


Рис. 5.58

844 Найдите область определения функции:

$$y = \frac{1}{x^4 - 4x^2}; \quad y = \sqrt{2x}; \quad y = \sqrt{-2x}; \quad y = \frac{1}{|4-x|}.$$

845 Есть ли на графике функции $y = x^2 - 4x + 3$ точки, ординаты которых равны: 7; -15? Если есть, то чему равны их абсциссы?

846 Пересекает ли прямая $y = 12$ график данной функции и если да, то в каких точках:

а) $y = x^2 + 4$; б) $y = 2 - x^2$?

847 При каких значениях x функция $y = \frac{7-5x}{2}$ принимает отрицательные значения? неотрицательные значения?

848 Постройте в одной системе координат графики функций $y = 2x - 6$ и $y = 0,5x + 3$. Используя графики, определите:

- а) при каких значениях x значения функций равны;
 б) при каких значениях x значения функции $y = 2x - 6$ больше значений функции $y = 0,5x + 3$;
 в) при каких значениях x значения функции $y = 2x - 6$ меньше значений функции $y = 0,5x + 3$;
 г) при каких значениях x обе функции принимают положительные значения;
 д) при каких значениях x обе функции принимают отрицательные значения.

849 Выбрав удобные единицы на осях, постройте график функции:
 а) $y = 0,05x - 0,01$; б) $y = -50x + 100$.

850 Изучая зависимость между высотой сосны и диаметром её ствола, учёные выявили тенденцию увеличения диаметра ствола с увеличением высоты сосны. Некоторые данные приведены в таблице:

Диаметр, см	12	15	20	24	26	30	32	34	40	45
Высота, м	19	20	18	24	25	23	26	25	25	27

Отметьте соответствующие точки в координатной плоскости. Проведите прямую, аппроксимирующую эти данные. Определите, чему примерно равна высота сосны, если её диаметр равен 35 см; 50 см.

851 Имеют ли общие точки графики данных функций? Если имеют, то сколько?

а) $y = \frac{10}{x}$ и $y = 10x$; в) $y = -\frac{10}{x}$ и $y = 0,1x$;
 б) $y = \frac{10}{x}$ и $y = -10x$; г) $y = -\frac{10}{x}$ и $y = -0,1x$.

852 При каком значении a график функции $y = \frac{a}{x}$ не пересекает график функции $y = \sqrt{x}$: $a = 1$, $a = 100$, $a = -0,1$?

853 Постройте график функции:

1) а) $y = \frac{6}{|x|}$; б) $y = -\frac{6}{|x|}$.

2) а) $y = \frac{12}{x} + 1$; б) $y = \frac{12}{x} - 1$.

Вероятность, статистика, комбинаторика

854 а) В турнире по гимнастике выступают 6 спортсменов. Порядок их выступления определяется жеребьёвкой. Сколько существует различных вариантов очередности выступления гимнастов?

б) У второклассника Миши 4 карточки с цифрами 0, 1, 3, 7. Сколько различных трёхзначных чисел он может из них составить? Сколько из этих чисел будет делиться на 5?

855 Дальтонизм — это врождённая особенность зрения человека, которая выражается в неспособности различать один или несколько цветов. Частота проявления дальтонизма у мужчин колеблется от 0,02 до 0,08, а у женщин составляет примерно 0,004. Сколько дальтоников-мужчин и сколько дальтоников-женщин можно ожидать в городе с населением 100 000 человек?

Указание. Считайте, что численность мужского и численность женского населения в городе примерно равны.

856 В игре «Что? Где? Когда?» на столе осталось 3 письма (рис. 5.59). Волчок крутится по часовой стрелке. Если стрелка останавливается на уже пустом секторе, то выбирается письмо, ближайшее по направлению вращения волчка. У какого из писем больше шансов, что на него падёт выбор волчка? Оцените шансы каждого письма.

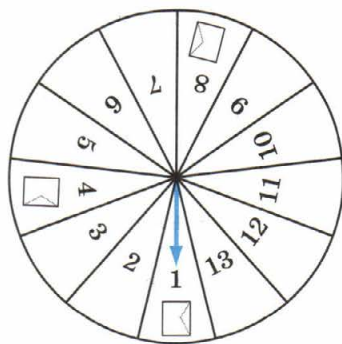


Рис. 5.59

Чему вы научились

Это надо знать (основные теоретические сведения)

- 1 Задайте формулой зависимость объёма куба V от длины его ребра a . Какая переменная в этом примере является функцией, а какая аргументом? Укажите область определения данной функции.
- 2 Используя текст учебника, приведите примеры задания функции графиком, таблицей, формулой.
- 3 Прочитайте запись $f(x) = x + 3$. Что означает запись $f(-5)$? Найдите $f(-5)$.
- 4 На примере функции $y = \frac{5}{x-1}$ объясните, как находят область определения функции, заданной формулой.
- 5 На рисунке 5.60 изображён график функции, заданной на промежутке $[-5; 5]$. По графику определите:
 - а) значение y при $x = -1; 0; 3$;
 - б) значения x , при которых $y = 0; 1; -1$.
- 6 С помощью графика функции (рис. 5.60) опишите её свойства.
- 7 Сформулируйте определение линейной функции. Приведите пример конкретной формулы, задающей линейную функцию.
- 8 Что является графиком линейной функции?
- 9 При каких значениях k функция $y = kx + 1$ является возрастающей? убывающей? Приведите пример возрастающей линейной функции; убывающей линейной функции. В каждом случае изобразите схематически её график.
- 10 Укажите область определения функции $y = \frac{k}{x}$. Что является графиком функции $y = \frac{k}{x}$?
- 11 Как расположен на координатной плоскости график функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$? при $k < 0$?

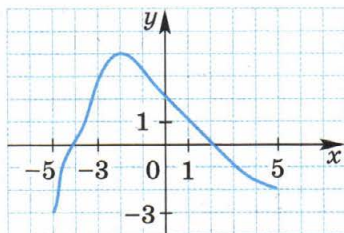


Рис. 5.60

Это надо уметь (обязательные результаты обучения)

- 1 В таблице приведены данные температуры воздуха 10 апреля в городе Грибове.

Время, ч	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Температура, °C	1	0	-2	-3	-2	0	6	10	10	7	4	3	2

Постройте график температуры и определите:

- а) в какое время суток температура равнялась 0°C ;
 - б) в какое время суток температура возрастала; убывала; была положительной; была отрицательной;
 - в) каково максимальное значение температуры, каково её минимальное значение;
 - г) в каких границах менялась температура в течение суток;
 - д) чему равнялась температура в 17 ч;
 - е) в какое время суток температура равнялась 8°C .
- 2 Функция задана формулой $y = x^2 - 4$.
- а) Найдите значение функции при $x = 0$; -3 .
 - б) При каких значениях x значение функции равно -3 ?
- 3 Функция задана формулой $f(x) = 2x - 5$.
- а) Найдите $f(0)$, $f(-1,5)$.
 - б) Найдите значение x , при котором $f(x) = 18$; $f(x) = 0$.
- 4 Определите нули функции $y = x^2 + 3x$.
- 5 По графику функции (см. рис. 5.30) определите:
- а) нули функции;
 - б) значения аргумента, при которых функция положительна;
 - в) промежуток, на котором функция убывает;
 - г) наибольшее значение функции.
- 6 От Москвы до Ржева 240 км. Автобус выходит из Москвы и едет во Ржев со средней скоростью 60 км/ч. Расстояние y , которое остаётся проехать до Ржева, — это функция времени x движения автобуса.
- а) Задайте эту функцию формулой.
 - б) Какое расстояние останется проехать автобусу через 1 ч после начала движения? через 2 ч? через 4 ч?
 - в) Через какое время автобус будет находиться в 100 км от Ржева? в 80 км от Ржева?
 - г) Что является графиком данной функции?
 - д) Возрастающей или убывающей является функция?
 - е) Постройте график данной функции (выберите удобные единицы на осях).

7 Постройте график функции:

а) $y = -\frac{1}{3}x$; б) $y = 1,5x + 6$; в) $y = -0,5x + 1$.

8 Постройте график функции $y = -2x - 0,5$ и ответьте на вопросы:

а) При каких значениях x значения функции равны 0? больше 0? меньше 0?

б) Возрастающей или убывающей является функция?

9 Постройте график функции $y = \frac{6}{x}$.

а) Укажите область определения этой функции.

б) При каких значениях x значения функции больше нуля? меньше нуля?

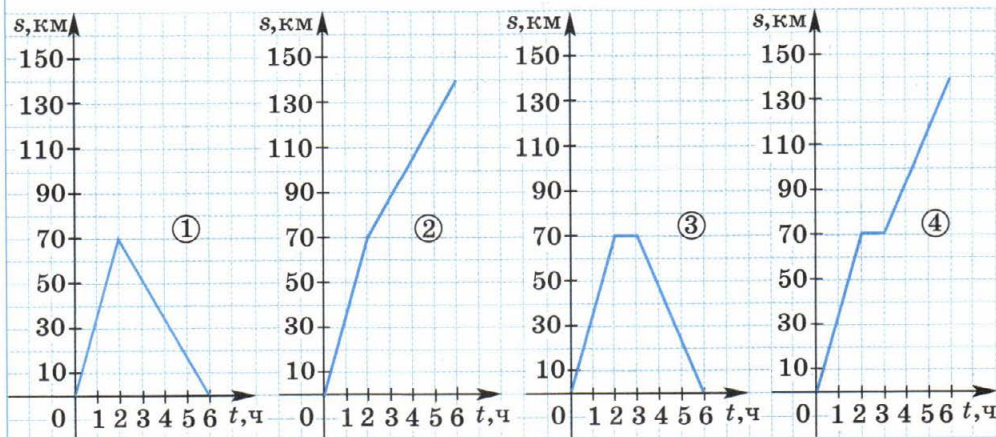
в) Возрастает или убывает функция при $x < 0$? при $x > 0$?

10 Постройте график функции $f(x) = -\frac{8}{x}$. С помощью графика найдите приближённо: а) $f(3)$, $f(-6)$; б) значение x , при котором $f(x) = 5$, $f(x) = -7$.

Проверьте себя (тест)

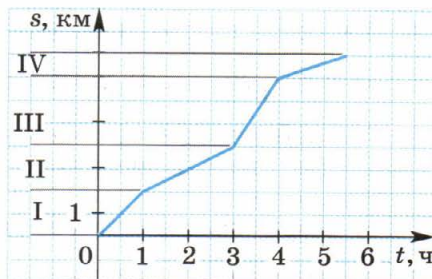
1 Расстояние между городами 800 км. Поезд идёт из одного города в другой со средней скоростью 70 км/ч. Задайте формулой зависимость расстояния s (в км), которое поезду осталось пройти, от времени движения t (в ч).

2 Автобус отправился из города в посёлок и вернулся обратно, сделав в посёлке остановку на один час. Какой из графиков описывает зависимость пройденного автобусом расстояния от времени движения?



- 3 По реке плывёт плот. На рисунке изображён график его движения. На каком из участков пути скорость течения наибольшая?

- 1) на первом
- 2) на втором
- 3) на третьем
- 4) на четвёртом



- 4 Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = 3 - 2x^3$. Найдите $f(-2)$.

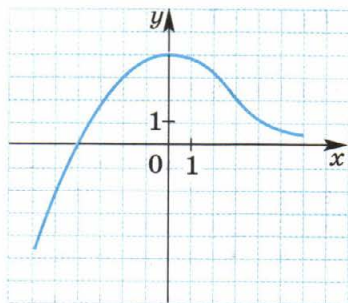
- 5 Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{если } x < 2 \\ x - 6, & \text{если } x \geq 2. \end{cases}$

Найдите $f(-10)$.

- 6 Найдите область определения функции $y = \frac{x-3}{3x^2-12}$.

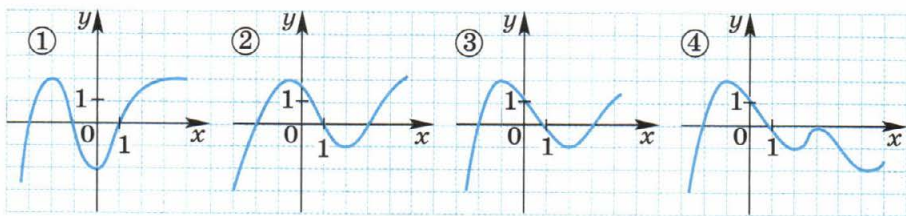
- 7 Функция задана графиком на отрезке $[-6; 6]$. Выпишите номера верных утверждений:

- 1) $f(0) = -4$
- 2) наибольшее значение функции равно 4
- 3) -4 и 4 — нули функции
- 4) функция принимает положительные значения при $-4 < x \leq 6$



- 8 Какой из графиков, изображённых на рисунке, может служить графиком функции, обладающей свойствами:

$y > 0$ при $-2 < x < 1$; функция убывает на промежутке $[-1; 2]$; функция возрастает на промежутке $[2; +\infty)$?



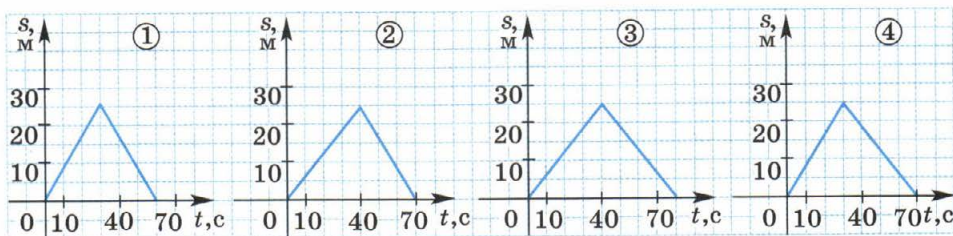
- 9 Какая функция не является линейной?

- 1) $y = \frac{x}{3}$
- 2) $y = 1 - 5x$
- 3) $y = \frac{4}{x}$
- 4) $y = -0,2x$

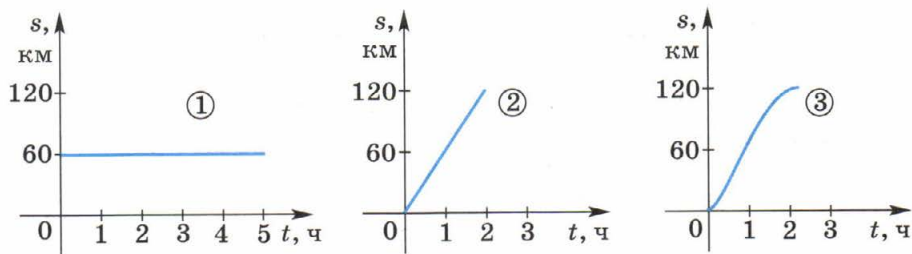
- 10 Какие из данных линейных функций являются возрастающими функциями? Выпишите соответствующие номера.

1) $y = -4x + 2$ 2) $y = 4x$ 3) $y = 2x - 7$ 4) $y = -7x$

- 11 Оля, Ира, Зоя и Аня соревновались в плавании на дистанции 50 м в 25-метровом бассейне. Графики их заплывов показаны на рисунке. По горизонтальной оси отложено время, по вертикальной – расстояние спортсменки от старта. Укажите график заплыва для каждой девочки, если Оля плыла быстрее всех, Ира плыла дольше всех, Зоя первые 25 м плыла быстрее, чем Аня.



- 12 На каком из рисунков показан график движения автобуса, который шёл с постоянной скоростью?



- 13 Графиком какой функции является гипербола?

1) $y = -\frac{x}{2,5}$ 2) $y = -\frac{2,5}{x}$ 3) $y = -2,5x$ 4) $y = \frac{1-2,5x}{2}$

- 14 В каких координатных четвертях расположен график функции $y = -\frac{10}{x}$?

1) в I и II 2) в I и III 3) во II и IV 4) в III и IV

- 15 Какая из данных прямых имеет с гиперболой $y = -\frac{10}{x}$ единственную общую точку, расположенную в IV координатной четверти?

1) $y = -100x$ 2) $y = 0,1x$ 3) $y = 100$ 4) $x = 0,1$

Вероятность и статистика

Теория вероятностей — одна из самых активно развивающихся ветвей современной математики. Начиналась она совсем несерьёзно, с игры в самый прямой смысл слова. Французские математики Блез Паскаль и Пьер Ферма стали изучать закономерности в играх, в которых всё зависит не от умения игроков, а от случая. Вы не раз играли в такие игры, используя игральный кубик или подбрасывая монету. Во всех этих ситуациях вы пользовались тем, что у монеты есть равные шансы упасть на одну или другую сторону, а у кубика — на любую из граней. Математики сказали бы, что вы использовали гипотезу о равновероятности.

Как решать вероятностные задачи, когда можно предположить, что случайные события равновероятны, вы узнаете в этой главе.

6.1 Статистические характеристики

1 Вспомним, какие статистические характеристики вам известны. Для этого рассмотрим следующий пример.

Пример 1. В течение года медицинский кабинет школы вёл учёт числа заболеваний каждого из учеников. В результате по 8А классу были получены данные, представленные в таблице.

На первый взгляд приведённые в таблице сведения дают очень мало информации об этой группе школьников. Но более детальное рассмотрение показывает, что наибольшее число заболеваний у учащихся 8А класса равно 6, а наименьшее — 0. Как вы уже знаете, разность между наибольшим и наименьшим значениями ряда данных называется *размахом*. В данном случае он равен 6.

Можно найти и *среднее арифметическое* этого ряда чисел. Среднее арифметическое часто обозначают так: $\bar{x}$. Если ряд содержит n чисел $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, то найти среднее арифметическое этого ряда можно по формуле $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$.

В нашем примере надо найти общее число всех заболеваний за год и разделить его на число учеников. Получим $\frac{64}{20} = 3,2$, т. е. среднее арифметическое числа заболеваний в 8А классе равно 3,2.

Фамилия, имя	Число заболеваний за год	Фамилия, имя	Число заболеваний за год
Амиров Тимур	2	Клементьев Пётр	0
Антоненко Олеся	4	Леонидов Фёдор	2
Борисов Илья	3	Ломидзе Вахтанг	4
Владимиров Олег	2	Михайлова Ирина	4
Гиреева Айнура	5	Николаев Алексей	4
Дмитриева Анна	3	Петрова Оксана	2
Егорова Софья	4	Родионов Максим	1
Емельянов Иван	1	Степанян Ашот	3
Иванов Дмитрий	6	Тарасова Дарья	6
Ильясова Зара	3	Шварц Яков	5

2 Как несложно заметить, многие числа в рассмотренном ряду повторяются. Для таких рядов есть более удобный способ нахождения среднего арифметического, основанный на использовании *числа повторений* наблюдаемых событий.

Числом повторений случайного события называют число, которое показывает, сколько раз данное событие наблюдалось в серии экспериментов.

Составим таблицу. В первом её столбце поместим наблюдаемые значения — числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; второй столбец будем использовать для регистрации появлений каждого из этих значений; в третий столбец занесём число его повторений.

Число заболеваний	Подсчёты	Число повторений	Число заболеваний	Подсчёты	Число повторений
0	/	1	4	///	5
1	//	2	5	//	2
2	////	4	6	//	2
3	////	4			

Теперь мы знаем, сколько раз в рассматриваемом ряду повторяется каждое из чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Поэтому при нахожде-

нии среднего арифметического каждую сумму равных слагаемых можно заменить произведением этого слагаемого на число повторений. Получим

$$\frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 2}{1 + 2 + 4 + 4 + 5 + 2 + 2} = \frac{64}{20} = 3,2.$$

Итак, мы получили тот же самый результат, но за меньшее количество действий, что особенно важно, если ряд «длинный».

Из нашей таблицы сразу можно найти и *моду* ряда данных. Напомним, что мода — это наиболее часто встречающееся в ряду число. Мода этого ряда равна 4, поскольку число 4 встречается в ряду 5 раз и никакое другое число ряда не встречается в нём 5 или более раз.

- 3** Различные *средние* используются в статистике для того, чтобы наиболее точно, или, как говорят, адекватно, описывать разные жизненные ситуации. Познакомимся с ещё одним показателем среднего в ряду данных — статистической характеристикой, называемой *медианой*. Для этого рассмотрим следующий пример.

Пример 2. В конце года 11 учеников 8 класса сдавали норматив по бегу на 100 метров. Были зафиксированы следующие результаты:

Имя ученика/ ученицы	Результат, с	Имя ученика/ ученицы	Результат, с
Данила	15,3	Петя	16,9
Лена	21,8	Оксана	18,4
Стас	16,1	Лейла	25,1
Оля	19,9	Боря	15,5
Ашот	14,7	Наташа	20,2
Миша	15,4		

После того как все ребята пробежали дистанцию, к преподавателю подошёл Петя и спросил, какой у него результат.

«Самый средний результат: 16,9 секунды», — ответил учитель. И пояснил: «Твой результат средний, потому что пять человек пробежали лучше, чем ты, и пять — хуже, то есть ты как раз посередине».

На языке статистики такой результат, как у Пети, и называют медианой ряда данных. Обычно медиану ищут в случае, когда числа в ряду являются какими-либо показателями и надо найти, например, человека, показавшего *средний* результат, фирму со *средней* годовой прибылью, авиакомпанию, предлагающую *средние* цены на билеты, и т. д.

Для того чтобы найти медиану ряда чисел, нужно сначала их упорядочить. В нашем примере упорядоченный ряд выглядит так:

$$\underbrace{14,7; 15,3; 15,4; 15,5; 16,1}_{\text{пять чисел, меньших, чем } 16,9} \quad \underbrace{16,9}_{\text{медиана}} \quad \underbrace{18,4; 19,9; 20,2; 21,8; 25,1}_{\text{пять чисел, больших, чем } 16,9}$$

Поскольку чисел всего 11, то медианой является 6-е число, т. е. 16,9.

Теперь найдём средний результат у девочек. Для этого выпишем результаты всех девочек в порядке возрастания:

$$18,4; 19,9; 20,2; 21,8; 25,1.$$

Медианой в данном случае является число 20,2, т. е. результат Наташи.

И наконец, найдём средний результат у мальчиков. Упорядоченный ряд их результатов выглядит так:

$$14,7; 15,3; 15,4; 15,5; 16,1; 16,9.$$

В этом ряду чётное количество чисел; два средних числа — 15,4 и 15,5. Медианой в таком случае считают среднее арифметическое этих двух чисел, т. е. их полусумму: $\frac{15,4 + 15,5}{2} = 15,45$.

Таким образом, медиана — это число, которое разделяет ряд данных на две части, одинаковые по количеству членов.

Чтобы найти медиану произвольного ряда чисел, их прежде всего надо упорядочить — записать по возрастанию.

- Медианой упорядоченного ряда, состоящего из нечётного числа членов, является число, которое находится посередине.
- Медианой упорядоченного ряда, состоящего из чётного числа членов, является среднее арифметическое двух чисел, находящихся посередине.

Отметим одно важное свойство медианы, которое является её главным преимуществом перед средним арифметическим. Это свойство *устойчивости медианы*: медиана не изменится ни при сильном увеличении наибольшего из крайних чисел упорядоченного ряда, ни при уменьшении наименьшего, ни при одновременном увеличении наибольшего и уменьшении наименьшего чисел.

- По таблице из примера 1 найдите среднее число заболеваний отдельно для девочек и для мальчиков.
- Используя таблицу из примера 1, найдите медиану ряда чисел.
- Нанесите данные из примера 2 на координатную прямую. Покажите медиану ряда. Вычислите и отметьте на координатной прямой среднее арифметическое ряда.

A

857 ■ АНАЛИЗИРУЕМ ■ В таблице приведены расходы студента за шесть учебных дней недели.

День недели	Понедельник	Вторник	Среда	Четверг	Пятница	Суббота
Расходы, р.	38	40	35	40	27	24

Определите, какая статистическая характеристика находится в каждом случае:

а) $38 + 40 + 35 + 40 + 27 + 24 = 204$,

$204 : 6 = 34$, $\square = 34$ р.;

б) 24, 27, 35, 38, 40, 40,

$(35 + 38) : 2 = 36,5$, $\square = 36,5$ р.;

в) 38, 40, 35, 40, 27, 24, $\square = 40$ р.;

г) $40 - 24 = 16$, $\square = 16$ р.

■ ДЕЙСТВУЕМ ПО ПРАВИЛУ (858–859) ■

858 Найдите медиану следующего ряда чисел:

а) 12; 16; 19; 25; 30; 32; 33; 38; 40;

б) 15; 17; 19; 21; 23; 25; 27; 29; 31; 33;

в) 12; 8; 7; 14; 25; 6; 19; 18;

г) 2,5; 1,3; 1,5; 0,9; 1,7; 2,1.

859 В таблице представлены данные о производстве электроэнергии в России в 2000–2008 гг. (в миллиардах киловатт-часов).

Год	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Произведено, млрд кВт · ч	877,8	891,3	891,3	916,3	931,9	953,1	995,8	1015,3	1040,4

Найдите среднее арифметическое и медиану представленного ряда чисел.

860 Столбчатая диаграмма, изображённая на рисунке 6.1, показывает, сколько книг прочитал каждый из ребят за летние каникулы.

Ответьте на вопросы:

а) Кто из ребят прочёл больше всего книг?

б) Кто за летние каникулы не прочёл ни одной книги?

в) Найдите размах этих данных.

г) Найдите среднее арифметическое этого ряда данных.

д) Найдите медиану этого ряда данных.

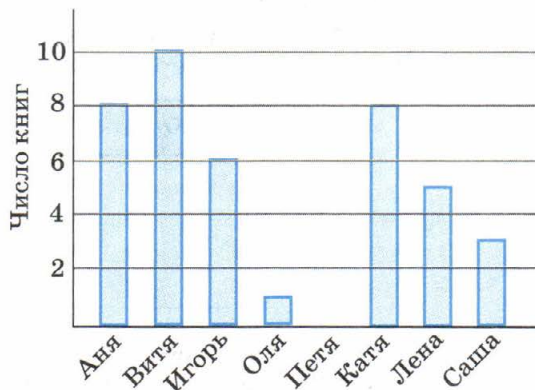


Рис. 6.1

861 В таблице зафиксирована посещаемость выставки прикладного искусства северных народов в течение одной недели.

День недели	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
Число посетителей	711	690	670	539	840	986	1024

Для полученного ряда данных найдите:

а) размах; б) среднее арифметическое; в) медиану.

862 В магазине «Спектр» представлено несколько моделей телевизоров с различными размерами экрана (длина диагонали в дюймах):

Модель телевизора	A	B	C	D
Размер экрана	20	36	36	36
Модель телевизора	E	F	G	H
Размер экрана	25	32	25	32

а) Какой самый распространённый размер экрана в этом магазине? (Найдите моду данного ряда.)

б) Каков размер экрана «среднего» телевизора? (Найдите медиану данного ряда.)

- 863** а) В течение года Лена получила следующие отметки за контрольные по алгебре: одну двойку, четыре тройки, шесть четвёрок и три пятёрки. Занесите эти данные в таблицу частот.

Отметка	Число повторений
2	...
...	...
...	...
...	...

Найдите среднее арифметическое, моду и медиану ряда отметок. Какую из полученных характеристик Лена предпочла бы иметь в качестве годовой отметки?

- б) **ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ** Изучите свои отметки по алгебре, полученные в течение года, и найдите среднее арифметическое, медиану и моду ряда отметок. Сделайте вывод о своих успехах и прогноз, какая годовая отметка вам будет выставлена.

- 864** **РАССУЖДАЕМ** Маша, Саша, Катя, Лена, Ваня и Миша пошли в пиццерию. Ваня съел 5 кусков пиццы, Миша, Саша и Лена — по 3 куска, Катя — 2 куска, Маша — 1 кусок. Найдите все известные вам средние этих данных. Если бы Ваня съел не 5, а 7 кусков пиццы, как бы изменились эти величины?

Б

- 865** 1) Президент компании получает 1 000 000 р. в год, четверо его заместителей получают по 200 000 р. в год, а 20 служащих компании получают по 100 000 р. в год. Найдите все средние (среднее арифметическое, моду, медиану) зарплат в компании.
2) Компания должна предоставить в муниципальную статистическую службу информацию о средней зарплате служащих компании и о зарплате среднего служащего. Какие из найденных вами данных надо предоставить в каждом случае?
3) Какой показатель: медиана зарплат или их среднее арифметическое — представляется вам более объективным?
- 866** У группы из 20 восьмиклассников спросили, сколько примерно часов в день они тратят на приготовление домашних заданий. Ответы школьников представлены на диаграмме, изображённой на рисунке 6.2.

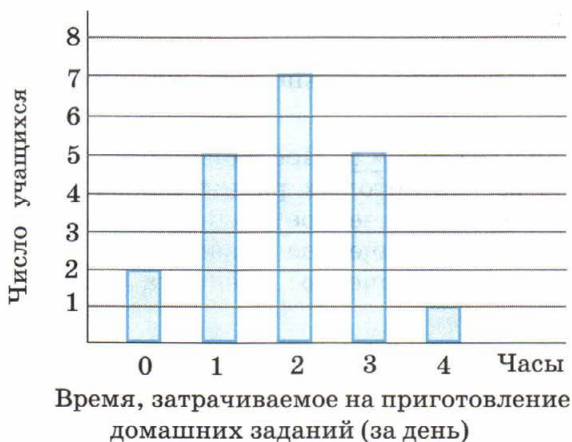


Рис. 6.2

- Представьте эти данные в виде таблицы.
- Сколько времени в день в среднем тратит ученик из этой группы на приготовление домашних заданий? (Найдите среднее арифметическое этого ряда данных.)
- Сколько времени тратит средний ученик на приготовление домашних заданий? (Найдите медиану этих данных.)
- Сколько времени тратит на приготовление домашних заданий большинство из этих 20 ребят? (Найдите моду этих данных.)

867 ■ ПРАКТИЧЕСКАЯ СИТУАЦИЯ ■ Соберите данные о стоимости одного из основных продуктов питания в магазинах вашего микрорайона (например, о стоимости 1 л молока). Вычислите статистические характеристики полученного вами ряда чисел.

868 ■ РАССУЖДАЕМ ■ Для службы в Президентском полку отбирают призывников ростом не менее 175 см и не более 190 см. Есть три группы призывников, про которые известно, что: в первой группе средний рост равен 180 см; во второй группе максимальный рост равен 189 см; в третьей группе медиана ряда ростов равна 176 см. В какой из этих групп не менее половины призывников заведомо годны к службе в Президентском полку?

869 ■ ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО ■ У Катиной кошки 6 котят. Медиана масс котят равна 240 г. Масса Катиного любимого котёнка равна 250 г. Верны ли следующие утверждения?

- Ровно половина котят имеют массу меньше, чем Катин любимец.

б) Менее половины котят имеют массу больше, чем Катин любимец.

в) Среди котят обязательно есть котёнок, масса которого равна 230 г.

870 ■ **ЭКСПЕРИМЕНТИРУЕМ** ■ Постройте ряд из четырёх или более чисел (не все из которых равны между собой), у которого:

а) среднее арифметическое равно медиане;

б) среднее арифметическое равно моде;

в) среднее арифметическое, медиана и мода равны между собой.

6.2 Вероятность равновозможных событий

В 7 классе вы учились оценивать вероятность случайного события, исходя из статистических данных. Эта вероятность приближённо равна частоте наступления интересующего нас события при проведении большого числа одинаковых случайных экспериментов.

Однако какой бы длинной ни была серия экспериментов, подсчитанная частота даст только приближённое значение вероятности. И, кроме того, далеко не всегда такую серию экспериментов можно реально осуществить. Чтобы вычислить вероятность выпадения орла, английский математик Карл Пирсон провёл, как вы могли прочесть в учебнике для 7 класса, 24 000 экспериментов по бросанию монеты. Но мы не можем, например, провести десятки тысяч испытаний для экспериментального вычисления возможности выигрыша в лотерею. Нам просто не хватит денег.

К счастью, во многих ситуациях существуют более «экономичные» способы расчёта вероятностей. Если все исходы случайного эксперимента *равновозможны*, то вероятность каждого такого исхода можно подсчитать, не проводя экспериментов.

Самый простой из примеров такого рода — уже упомянутое подбрасывание монеты. Этот эксперимент имеет два исхода — орёл и решка. Статистическим путём, проводя эксперименты, мы установили, что вероятность появления орла равна вероятности появления решки и равна $\frac{1}{2}$. Но этот результат нетрудно было и предугадать.

Если монета «правильная», то нет никаких оснований считать один исход вероятнее другого. И так как оба исхода равновозможны, то вероятность каждого из них равна $\frac{1}{2}$.

Точно так же при бросании правильного кубика возможны шесть исходов, и все они равновероятны. Поэтому вероятность каждого исхода равна $\frac{1}{6}$.

Однако если кубик неправильный (например, по какой-то причине смещён центр тяжести), то исходы эксперимента при его подбрасывании неравновозможны, и поэтому без проведения опытов найти вероятность какого-либо из них не удастся.

Рассмотрим примеры определения вероятности случайного события в экспериментах с равновероятными исходами.

Пример 1. Для проведения экзамена приготовили 24 билета. Андрей не выучил один билет и очень боится его вытянуть. Какова вероятность того, что Андрею достанется несчастливый билет?

Всего у данного эксперимента «вытянуть наугад один билет» 24 исхода, все они равновероятны. У Андрея один шанс из 24 вытянуть несчастливый билет. Поэтому вероятность того, что Андрею достанется несчастливый билет, равна $\frac{1}{24}$.

Пример 2. Какова вероятность того, что при бросании правильного игрального кубика выпадет чётное число очков?

Мы знаем, что при бросании игрального кубика возможны шесть равновероятных исходов. При этом только три из них (выпадение двух очков, четырёх очков и шести очков) приводят к наступлению события «выпало чётное число очков». Таким образом, для наступления этого события есть 3 шанса из 6, и поэтому его вероятность равна $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Пример 3. В лотерее 10 выигрышных билетов и 240 билетов без выигрыша. Какова вероятность выиграть в эту лотерею, купив один билет?

В лотерею разыгрывается всего $10 + 240 = 250$ билетов, любой из них можно купить с одинаковой вероятностью. Есть 10 шансов из 250 выиграть, и, следовательно, вероятность выигрыша равна $\frac{10}{250} = \frac{1}{25}$.

В общем случае рассмотрим случайный эксперимент, который может завершиться одним из n возможных исходов, причём все n исходов равновероятны. Пусть ровно m из этих n исходов приводят к наступлению события A (будем называть такие исходы *благоприятными* для события A). Тогда вероятность события A считают равной дроби $\frac{m}{n}$.

Если обозначить вероятность наступления события A символом $P(A)$, то можно записать формулу

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Определение

Для экспериментов с равновероятными исходами вероятностью случайного события называют отношение числа исходов, благоприятных для этого события, к числу всех возможных исходов эксперимента.

Такое определение вероятности было впервые дано в работах французского математика Лапласа, и обычно его называют *классическим*. Воспользуемся этим определением для ситуаций, разобранных выше.



Пьер Симон Лаплас
(1749–1827),
французский математик

Эксперимент	Число всех возможных исходов эксперимента, n	Событие A	Число исходов, благоприятных для события A , m	Вероятность наступления события A : $P(A) = \frac{m}{n}$
Бросаем монету	2	Выпал орёл	1	$\frac{1}{2}$
Вытаскиваем экзаменационный билет	24	Вытанули несчастливый билет	1	$\frac{1}{24}$
Бросаем кубик	6	На кубике выпало чётное число очков	3	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
Играем в лотерею	250	Выиграли, купив один билет	10	$\frac{10}{250} = \frac{1}{25}$

А чему равна вероятность события, противоположного событию A ?

Пусть среди n равновероятных исходов событию A благоприятны m исходов, тогда событию B , противоположному событию A , благоприятны $n - m$ исходов. Значит, $P(B) = \frac{n - m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A)$.

- Как изменится ответ на вопрос задачи, если:
 - а) Андрей не выучил 2 билета (пример 1);
 - б) в лотерее 20 выигрышных билетов и 230 билетов без выигрыша (пример 3)?
- Бросают правильный игральный кубик. Назовите исходы, благоприятные для события, и определите его вероятность:
 - а) выпадет 3 очка;
 - б) выпадет не менее 5 очков;
 - в) выпадет простое число очков;
 - г) выпадет меньше 7 очков;
 - д) выпадет больше 6 очков.
- Равновероятны ли события A и B :
 - а) A : вытянуть билет № 1; B : вытянуть билет № 13 (пример 1);
 - б) A : выпадет чётное число очков; B : выпадет нечётное число очков (пример 2);
 - в) A : купить выигрышный билет; B : купить билет без выигрыша (пример 3)?
- Для каждого события A из таблицы назовите противоположное ему событие B . Найдите $P(B)$. Чему равна сумма вероятностей событий A и B ?

A

- 871** 1) Могут ли быть неравновозможными события A и B :
- а) A : попасть при выстреле по мишени;
 B : промахнуться при выстреле по мишени;
 - б) A : 1 июня будет солнце;
 B : 1 июня будет дождь;
 - в) A : посаженный цветок приживётся;
 B : посаженный цветок погибнет;
 - г) A : футбольная команда выиграет;
 B : футбольная команда проиграет?
- 2) Верно ли, что события A и B равновозможны:
- A : при вынимании из колоды одной карты будет вынута шестёрка;
 - B : при вынимании из колоды одной карты будет вынут туз?

- 872** ■ **ДЕЙСТВУЕМ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ** ■ Для каждого из следующих экспериментов найдите число всех возможных исходов, число благоприятных исходов и вычислите вероятность.
- а) На столе 12 кусков пирога. В трёх «счастливых» из них запечены призы. Какова вероятность взять «счастливый» кусок пирога?
 - б) В урне 15 белых и 25 чёрных шаров. Из урны наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что он будет белым?
 - в) Для лотереи отпечатали 500 билетов, из них 25 выигрышных. Какова вероятность вытянуть билет без выигрыша?

- 873** В колоде 36 карт. Определите вероятность следующих событий:
А: карта, вытянутая наугад из колоды, оказалась дамой пик;
В: карта, вытянутая наугад из колоды, оказалась тузом;
С: карта, вытянутая наугад из колоды, оказалась красной масти;
D: карта, вытянутая наугад из колоды, оказалась не королём.
- 874** В соревнованиях по прыжкам в длину участвуют 4 спортсмена из России, 3 из Белоруссии, 2 из Украины, 1 из Армении. Порядок, в котором они будут выступать, определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым будет выступать:
а) спортсмен из России;
б) спортсмен не из России.
- 875** В группе российских туристов 2 человека владеют английским и французским языками, 1 человек — английским и немецким, 7 человек — только английским и 10 человек не владеют ни одним иностранным языком. Найдите вероятность того, что случайно выбранный гидом турист владеет:
а) французским языком;
б) двумя языками;
в) английским языком.
- 876** Наугад выбрано двузначное число. Какова вероятность того, что оно окажется:
а) кратным 5;
б) простым?
- 877** На трёхместную скамейку произвольным образом садятся двое мужчин и женщина. Какова вероятность того, что мужчины окажутся рядом?
Указание. Обозначьте женщину буквой Ж, а мужчин буквами M_1 и M_2 . Выпишите все возможные варианты их размещения на скамейке.
- 878** а) В урне находятся красный, зелёный и жёлтый шары. Их не глядя вынимают один за другим. Какова вероятность того, что шары будут вынуты в такой последовательности: жёлтый, красный, зелёный?
б) Чтобы открыть чемодан, нужно в некотором порядке набрать четыре цифры: 3, 5, 7 и 9. Хозяин помнит цифры, но забыл их последовательность. Какова вероятность того, что он сумеет открыть чемодан с первой попытки?
в) Мама дала маленькой девочке, не умеющей читать, кубики с буквами «О», «К», «Т» и предложила сложить из них какое-нибудь слово. Какова вероятность того, что у девочки случайным образом получится слово КОТ?

Указание. Число всех возможных исходов равно числу перестановок из заданных элементов; для их подсчёта можно воспользоваться формулой $P_n = n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Б**■ РАССУЖДАЕМ (879–880) ■**

879 Грани кубика окрашены в красный или жёлтый цвет. Вероятность выпадания красной грани равна $\frac{1}{6}$, вероятность выпадания жёлтой грани равна $\frac{5}{6}$. Сколько красных и сколько жёлтых граней у этого кубика?

880 В ящике лежит 8 красных, 2 синих и 20 зелёных карандашей. Вы наугад вынимаете один карандаш. Какова вероятность того, что этот карандаш красный? жёлтый? не зелёный? Какое наименьшее количество карандашей нужно вынуть, чтобы с вероятностью, равной 1, среди них оказался зелёный карандаш?

881 ■ **АНАЛИЗИРУЕМ** ■ В урне находится 3 шара: жёлтый, синий, зелёный. Их не глядя вынимают один за другим. Какова вероятность того, что:

- а) первым будет вынут синий шар;
- б) последним будет вынут зелёный шар;
- в) вначале будут вынуты синий и жёлтый шары (в любом порядке)?

882 Слово написали на полоске картона и разрезали полоску на буквы. Найдите вероятность того, что если эти кусочки картона перемешать и снова составить их в ряд случайным образом, то опять получится то же слово, если это слово:

- а) «алгебра»;
- б) «перестановка».

883 Наугад выбрано натуральное число от 1 до 1 000 000. Какова вероятность того, что оно окажется квадратом натурального числа?

884 Даны отрезки длиной 2, 5, 6 и 10 см. Какова вероятность того, что из выбранных наудачу трёх отрезков можно составить треугольник?

Указание. Чтобы найти благоприятные исходы, воспользуйтесь неравенством треугольника.

6.3 Сложные эксперименты

В задачах на вычисление вероятности в классической модели, как вы могли уже понять, очень полезным оказывается знание комбинаторики. Рассмотрим примеры использования комбинаторных приёмов в ситуациях, когда случайный эксперимент состоит из нескольких испытаний, производимых одновременно или последовательно.

Пример 1. (Задача Даламбера.) Монету бросают два раза. Какова вероятность того, что хотя бы один раз выпадет орёл?

Изобразим дерево возможных исходов (рис. 6.3). Эксперимент имеет 4 равновозможных исхода; в первых трёх из них происходит интересующее нас случайное событие. Поэтому вероятность того, что при двух бросаниях монеты хотя бы один раз выпадет орёл, равна $\frac{3}{4}$.



Рис. 6.3

Пример 2. Одновременно бросают два кубика — чёрный и белый. Какова вероятность того, что на чёрном выпадет больше очков, чем на белом?

Сначала подсчитаем общее количество исходов эксперимента. Для этого мы их просто все выпишем, составив соответствующую таблицу:

Чёрный кубик \ Белый кубик	1	2	3	4	5	6
1	11	21	31	41	51	61
2	12	22	32	42	52	62
3	13	23	33	43	53	63
4	14	24	34	44	54	64
5	15	25	35	45	55	65
6	16	26	36	46	56	66

Каждый исход обозначен двузначным числом, первая цифра которого показывает, сколько очков выпало на чёрном кубике, а вторая — сколько очков выпало на белом кубике. Всего исходов 36, и в 15 из них происходит интересующее нас событие. Значит, вероятность события «на чёрном кубике выпало больше очков, чем на белом» равна $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

Пример 3. Одновременно бросают три кубика. Какова вероятность следующих событий?

A: на всех кубиках выпало одинаковое число очков;

B: на всех кубиках число очков различно.

Вычислим сначала общее число исходов этого эксперимента. Бросок каждого кубика может привести к шести различным исходам — может выпасть от 1 до 6 очков. Поэтому по правилу умножения общее число исходов равно $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$. (Все исходы мы считаем равновероятными.)

Теперь найдём число исходов, благоприятных событию **A**. На всех кубиках одновременно может появиться 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков, значит, благоприятных исходов всего 6. Поэтому

$$P(A) = \frac{6}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{1}{36}.$$

Теперь найдём число исходов, благоприятных событию **B**. На одном кубике может появиться любое число очков от 1 до 6, т. е. для первого кубика возможны 6 исходов. Так как на всех кубиках количество очков должно быть разным, то для второго кубика остаётся только 5 исходов, а для третьего кубика — только 4 исхода. Тогда число всех исходов, благоприятных событию **B**, равно $6 \cdot 5 \cdot 4$.

$$\text{Следовательно, } P(B) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{5}{9}.$$

- Какова вероятность того, что при двух бросаниях монеты (см. пример 1):
 - а) хотя бы один раз выпадет решка;
 - б) ни разу не выпадет орёл;
 - в) монета дважды упадёт на одну и ту же сторону;
 - г) монета упадёт на разные стороны?
- Используя таблицу из примера 2, выясните, какова вероятность того, что:
 - а) на кубиках выпадет одинаковое число очков;
 - б) на белом кубике выпадет больше очков, чем на чёрном;
 - в) на белом кубике выпадет не меньше очков, чем на чёрном.
- Являются ли события **A** и **B** противоположными (см. пример 3)?
- Чему равна в примере 3 вероятность следующих событий:
 - C:** хотя бы на двух кубиках выпавшее число очков различно;
 - D:** хотя бы на двух кубиках выпавшее число очков совпало?

А

885 ■ ВЕРНО ИЛИ НЕВЕРНО Верно ли, что события A и B равновероятны:

а) при одновременном бросании двух монет

A : дважды выпал орёл;

B : один раз выпал орёл, один раз выпала решка;

б) при одновременном бросании двух кубиков

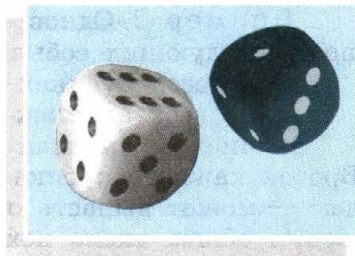
A : сумма очков на кубиках чётна;

B : сумма очков на кубиках нечётна;

в) при одновременном бросании двух кубиков

A : сумма очков на кубиках больше 10;

B : сумма очков на кубиках меньше 5?



886 а) Какова вероятность того, что при двух бросаниях игрального кубика в сумме выпадет 2 очка; 3 очка; 4 очка; 10 очков; 11 очков; 12 очков?

б) Даша и Маша бросают игральные кубики: Даша — чёрный, Маша — белый. Они договорились, что если сумма очков на кубиках окажется равной шести, то выигрывает Даша, а если сумма очков будет равна восьми, то выигрывает Маша. Справедлива ли эта игра или у одной из девочек шансов на выигрыш больше?

887 Чемодан открывается кодом 710. Цифра каждого из трёх рядов при наборе кода может быть любой от 0 до 9. Человек рассеянный забыл код своего чемодана. Сколько попыток в худшем случае ему придётся сделать, чтобы открыть свой чемодан? Какова вероятность того, что, набрав произвольно номер из трёх цифр, он сможет сразу открыть чемодан?

Б

888 ■ РАССУЖДАЕМ В урне находится 5 шаров: красный, жёлтый, синий, зелёный и белый. Их, не глядя, вынимают один за другим. Какова вероятность того, что:

а) первым будет вынут белый шар, а последним — зелёный;

б) сначала будут вынуты жёлтый и зелёный шары (в любом порядке);

в) красный и синий шары будут вынуты друг за другом (в любом порядке)?

889 Пять раз подбрасывают монету. Какова вероятность того, что:
а) все пять раз выпадет орёл; б) ни разу не выпадет орёл?

890 Три раза подряд подбросили монету. Найдите вероятности следующих событий:

A: хотя бы раз выпал орёл;

B: хотя бы раз выпала решка;

C: все три исхода одинаковы;

D: не все исходы одинаковы;

E: все три исхода разные.

891 Одновременно бросают два кубика. Какое значение суммы выпавших очков наиболее вероятно? Чему равна эта вероятность?

892 Замок на сейфе открывается набором определённой комбинации из пяти цифр, каждая из которых может быть любой от 0 до 9. С какой вероятностью мы откроем сейф в течение часа, если будем тратить на набор каждой новой комбинации около секунды?

6.4 Геометрические вероятности

(Для тех, кому интересно)

Понятно, что попасть мячом с одного и того же расстояния в большие ворота вероятнее, чем в маленькие. Точно так же при стрельбе при одних и тех же условиях попасть в большую мишень вероятнее, чем в маленькую.

В задачах, где существенную роль играют размеры объектов, можно по-другому подойти к определению вероятности случайного события — из геометрических соображений.

Пример. На квадратном столе выделен чёрный квадрат (рис. 6.4). Какова вероятность того, что фишка попадёт в чёрный квадрат, если её бросить на стол наугад (например, с закрытыми глазами)?

Легко понять, что эта вероятность равна отношению площади чёрного квадрата к площади поверхности стола. Если, например, площадь стола равна $0,6 \text{ м}^2$, а площадь чёрного квадрата — $0,04 \text{ м}^2$, то

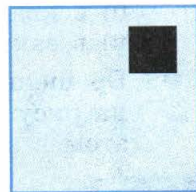


Рис. 6.4

$$P = \frac{0,04}{0,6} = \frac{1}{15}.$$

В рассмотренном примере мы пренебрегли геометрическими размерами самой фишки, поскольку иначе она могла бы попасть и на стол, и на квадрат одновременно. Вообще в задачах на геометрические вероятности обычно считается, что размеры предмета (фишки, пули, мяча, шайбы и т. п.) очень маленькие по сравнению с размерами места, куда он должен попасть (стол, мишень, ворота и т. д.).

Также принято считать, что, например, брошенная фишка с одинаковой вероятностью попадает в любое место стола, пуля с одинаковой вероятностью попадает в любое место мишени, а мяч или шайба — в любое место ворот.

Исходя из этого, можно понять, почему искомая вероятность равна отношению соответствующих площадей. Ведь, например, в рассмотренной задаче чёрный квадрат представлял благоприятные исходы, а стол — общее количество возможных исходов.

А

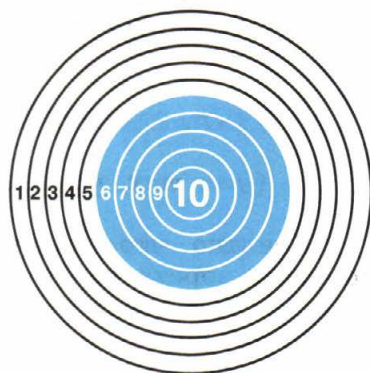
893 а) Стрелок, не целясь, стреляет в круглую мишень (рис. 6.5) и попадает в неё. Какова вероятность того, что он попал в синий круг? выбил не более 5 очков?

б) Стрелок, не целясь, стреляет в треугольную мишень (рис. 6.6) и попадает в неё. Какова вероятность того, что он попадёт в тройку? в двойку? в единицу?

894 Фишку наугад бросают в квадрат, изображённый на рисунке 6.7. Какова вероятность того, что фишка попадёт:

- а) в чёрный квадрат;
- б) в квадрат $ABCD$;
- в) в закрашенную рамку?

895 Брошенная наугад фишка попадает в фигуру, изображённую на рисунке 6.8. Какова вероятность того, что она попадёт при этом в закрашенную часть фигуры?



■ Рис. 6.5

Б

896 Фишку наугад бросают в квадрат со стороной 1, и она попадает в некоторую точку M . Какова вероятность того, что:

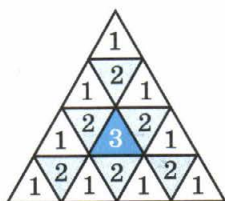


Рис. 6.6

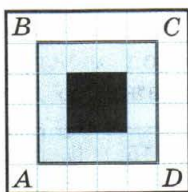


Рис. 6.7

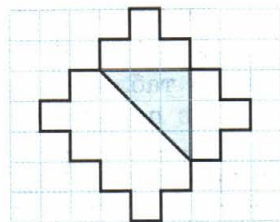


Рис. 6.8

а) расстояние от точки M до ближайшей стороны квадрата не превосходит 0,25;

б) расстояние от точки M до ближайшей диагонали квадрата не превосходит 0,25?

Указание. Отметьте на квадрате ту часть, попадание в которую является благоприятным исходом, и найдите её площадь.

897 Фигура Φ задана на координатной плоскости следующими условиями: $|x| \leq 5$ и $|y| \leq 5$. Известно, что центр квадрата со сторонами, параллельными осям координат, принадлежит фигуре Φ . Сторона квадрата равна 2. Какова вероятность того, что квадрат целиком содержится в фигуре Φ ?

Указание. Фигура Φ — это квадрат со стороной 10 и центром в начале координат. Квадрат не будет содержаться в фигуре Φ целиком, если расстояние от его центра до границ фигуры Φ меньше 1. Покажите штриховкой часть фигуры Φ , соответствующую благоприятным исходам.

Дополнительные задания

Статистические характеристики среднего

898 На стадионе «Локомотив» была зафиксирована следующая посещаемость четырёх футбольных матчей: 24 000, 18 000, 22 000, 24 000 зрителей.

а) Каково было среднее арифметическое посещаемости этих матчей?

б) Сколько зрителей должно посетить следующий матч, чтобы среднее арифметическое посещаемости выросло?

899 В таблице приведены данные о возрастном составе участников детского хора:

Возраст, годы	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Число участников	3	6	5	1	2	3	2	2	1

Найдите среднее арифметическое, моду и медиану возрастов участников хора.

- 900** В таблице показан расход электроэнергии в квартирах одного из подъездов четырёхэтажного дома за март:

Номер квартиры	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Расход электроэнергии, кВт · ч	120	98	137	85	142	103	95	92	110	146	107	82

- а) Сколько электроэнергии в среднем потребили жители этого подъезда в марте? (Найдите среднее арифметическое ряда.)
 б) Каков средний расход электроэнергии в квартирах этого подъезда в марте? (Найдите медиану ряда.)
- 901** Сколько членов в упорядоченном числовом ряду, если его медианой служит: а) десятый член; б) среднее арифметическое десятого и одиннадцатого членов?
- 902** а) Среднее арифметическое ряда, состоящего из девяти чисел, равно 12. К нему приписали число 2. Чему равно среднее арифметическое нового ряда?
 б) Среднее арифметическое ряда, состоящего из шести чисел, равно 15. Из него вычеркнули число 10. Чему равно среднее арифметическое нового ряда?
- 903** Среднее арифметическое некоторых семи чисел равно 12, а среднее арифметическое других трёх чисел равно 22. Найдите среднее арифметическое всех десяти чисел.
- 904** ■ **ИССЛЕДУЕМ** ■ Дан ряд из пяти чисел: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 .

- а) Каждый член ряда увеличили на 10. Запишите новый ряд и вычислите его среднее арифметическое, найдите моду и медиану. Сделайте вывод: как изменяются среднее арифметическое, мода и медиана ряда при увеличении каждого его члена на одно и то же число?
- б) Каждый член ряда увеличили в 10 раз. Запишите новый ряд и вычислите его среднее арифметическое, найдите моду и медиану. Сделайте вывод: как изменяются среднее арифметическое, мода и медиана ряда при увеличении каждого его члена в одно и то же число раз?

● Вероятность равновозможных событий

- 905** В лототроне находятся шары с номерами от 1 до 100. Шары были тщательно перемешаны, после чего один шар выпал. Какова вероятность того, что:

- а) выпавший номер оказался двузначным;
- б) выпавший номер кратен трём;
- в) выпавший номер не делится на четыре;
- г) выпавший номер не содержит цифру 5?

906 Слово «вероятность» написали на полоске картона, затем разрезали на буквы, перевернули и наугад вытянули одну букву. Какова вероятность того, что она будет гласной? что это будет буква «о»?

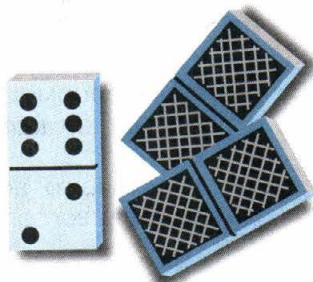
907 На стол выложили костяшки домино, перевернув их очками вниз; всего 28 штук. Наугад берут одну из них.

1) Какова вероятность того, что:

- а) взятая костяшка содержит 6 очков;
 - б) взятая костяшка не содержит 1 очко;
 - в) сумма очков на костяшке равна 5?
- 2) Докажите, что равновероятны события:

А: взята костяшка, на которой есть 4 очка;

В: взята костяшка, на которой есть 5 очков.



908 1) Для школьного новогоднего вечера напечатали 125 пронумерованных пригласительных билетов, между которыми будет разыгран главный приз. Какова вероятность того, что счастливый номер оканчивается:

а) цифрой 3; б) цифрой 9?

2) У Маши пригласительный билет с номером 33, а у Саши — с номером 99. Верно ли, что у Маши больше шансов получить главный приз, чем у Саши?

909 В урне находятся белые и синие шары, одинаковые на ощупь, всего 20 штук. Вероятность того, что вынутый наугад шар окажется белым, составляет 0,35. Сколько в урне синих шаров?

910 ■ ИЩЕМ ЗАКОНОМЕРНОСТЬ ■ 1) В корзине яблоко и груша. Из неё наугад вынимают один фрукт. Какова вероятность того, что это яблоко?

2) В корзине 2 яблока и груша. Из неё наугад вынимают один фрукт. Какова вероятность того, что это яблоко?

3) В корзине 3 яблока и груша. Из неё наугад вынимают один фрукт. Какова вероятность того, что это яблоко?

4) В корзине n яблок и груша. Из неё наугад вынимают один фрукт. Какова вероятность того, что это яблоко?

Указание. В задачах 1—3 подсчитайте число всех возможных исходов, не забыв при этом, что каждое яблоко надо учитывать отдельно. Чтобы ответить на вопрос задачи 4, нужно подметить закономерность.

Чему вы научились

Это надо знать (основные теоретические сведения)

- 1 Какие средние, используемые в статистике для изучения и обработки ряда данных, вы знаете?
- 2 Как найти медиану для ряда данных из нечётного числа элементов? из чётного числа элементов? Найдите медиану ряда:
12; 17; 13; 9; 19; 15; 20; 9.
- 3 Запишите формулу вычисления вероятности случайного события в классической модели. Поясните, что означает каждая буква в этой формуле.
Какому условию должны удовлетворять исходы эксперимента, чтобы можно было воспользоваться классическим определением вероятности?

Это надо уметь (обязательные результаты обучения)

- 1 На заводе, выпустившем партию телевизоров новой марки, изучили, по каким ценам продают телевизоры этой серии в магазинах города. Получился следующий ряд данных: 5320 р., 5300 р., 4290 р., 5300 р., 5350 р., 4280 р., 5300 р., 5320 р., 5400 р., 5290 р. Определите все средние и размах цен на телевизоры новой марки в магазинах города.
- 2 В классе учится 12 девочек и 18 мальчиков. По жребию выбирается один дежурный. Какова вероятность того, что дежурным окажется мальчик?
- 3 Какова вероятность того, что при бросании правильного игрального кубика выпадет не менее трёх очков?
- 4 Два брата и их друг садятся в автобус. Найдите вероятность того, что первым в автобус войдёт один из братьев.

Проверьте себя (тест)

- 1 Петя, готовясь к зачёту по английскому языку, в течение двух недель ежедневно записывал, сколько новых слов он выучил. Получился следующий ряд данных:

12, 12, 14, 20, 28, 8, 14, 10, 15, 12, 14, 12, 10, 15.

Для каждой статистической характеристики этого ряда укажите её значение.

А) 12 Б) 13 В) 14 Г) 20

1) среднее арифметическое 2) размах 3) мода 4) медиана

- 2 Сергей в течение учебного года в 8 классе получил следующие отметки по алгебре (без четвертных и годовой):

Отметка	2	3	4	5
Число повторений	3	6	12	8

Найдите среднее арифметическое, моду и медиану отметок Сергея.

- 3 Для ряда, все члены которого – натуральные числа, нашли:

- 1) моду 3) среднее арифметическое
2) медиану 4) размах

Какие из этих статистических характеристик не могут выражаться дробными числами?

- 4 Какое из чисел, являющееся статистической характеристикой ряда данных, всегда есть среди членов ряда?

- 1) среднее арифметическое 3) медиана
2) мода 4) размах

- 5 В упорядоченном ряду содержится 99 членов. Укажите номер члена, являющегося медианой этого ряда.

- 6 В урне 3 красных и 7 синих шаров, одинаковых на ощупь. Не глядя, вынимают один шар. Найдите вероятность того, что вынут синий шар.

- 1) $\frac{7}{3}$ 2) $\frac{8}{7}$ 3) $\frac{3}{10}$ 4) $\frac{7}{10}$

- 7 В урне находятся красный, жёлтый и синий шары, одинаковые на ощупь. Их, не глядя, вынимают один за другим. Какова вероятность того, что синий шар будет вынут раньше красного?

- 1) $\frac{2}{3}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) $\frac{1}{6}$

- 8 В библиотеке у Ани есть сборники стихов шести любимых поэтов. Чтобы выбрать стихотворение к праздничному вечеру, она сняла их с полки, а затем случайным образом поставила обратно. Какова вероятность того, что сборники окажутся на полке в алфавитном порядке?

- 9 Грани кубика жёлтого, красного и синего цвета. Вероятность выпадения жёлтой грани при подбрасывании кубика равна $\frac{1}{6}$, красной – $\frac{1}{2}$. Сколько у кубика жёлтых, красных и синих граней?

Ответы

Глава 1

4. а) $-\frac{5}{12}$; б) 1; в) 0; г) $-2,9$. 6. а) $\frac{3}{2}$; б) $-\frac{2}{3}$; в) $2\frac{1}{4}$; г) $\frac{4}{9}$.
 12. а) $\frac{3}{16}$; б) $1\frac{2}{3}$; в) $2\frac{1}{12}$; г) $-0,11$. 18. а) $c = \frac{\frac{S}{2} - ab}{a+b}$; б) $h = \frac{S}{2\pi r} - r$.
 28. а) $x - 3y$; б) $\frac{1}{a+2b}$; в) $\frac{2a}{b-3}$; г) $\frac{5n}{n-2}$. 29. а) y ; б) $\frac{m-n}{n}$; в) $3-a$;
 г) $\frac{c}{a+b}$. 30. а) $\frac{x-y}{x+y}$; б) $\frac{x-3}{x+3}$. 35. а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{3}{4}$. 36. а) $x+y$; б) $\frac{a-b}{2}$;
 в) $p+1$; г) $\frac{1}{a-b}$. 38. а) $\frac{a}{a+b}$; б) $\frac{m-p}{p}$; в) $\frac{a+1}{a}$; г) $\frac{x+y}{b+c}$; д) $x+y-z$;
 е) $\frac{a-b+c}{a+b+c}$. 40. а) $\frac{a}{b}$; б) $\frac{b}{b-c}$. 41. а) $-\frac{y}{y+1}$; г) $-\frac{5a}{b}$; д) $\frac{m+n}{m-n}$; е) $\frac{z}{z-3}$;
 з) $-a$; и) $\frac{n-p}{n}$. 43. а) $\frac{b-a}{2}$; б) $\frac{m+n}{4(m-n)}$. 50. б) $\frac{3a^2+5}{a^2+a}$; г) $\frac{mn+n^2}{mn-m^2}$; д) $\frac{c^2+d^2}{c(c-d)}$.
 52. а) $\frac{3n-7}{10n}$; б) $\frac{y-1}{xy}$; в) $\frac{1}{y^5}$; г) $\frac{a-z}{axyz}$; д) $\frac{b^2-c^2}{b^2c^2}$; е) $\frac{a+b}{a^2bc}$. 54. а) $\frac{4}{3}$;
 б) $\frac{x}{12(x-1)}$; в) $\frac{1}{ab}$; г) $\frac{3x-3y}{xy}$. 56. а) $\frac{2b}{a^2-b^2}$; б) $\frac{5}{c-5}$; г) $\frac{y}{(y-1)^2}$; д) $\frac{2ab}{a^2-b^2}$.
 57. а) $-\frac{1}{6}$; б) -4 ; в) $0,15$; г) -11 ; д) 2; е) $-\frac{1}{17}$. 61. а) $\frac{a+ab}{b}$; г) $\frac{a+b-ab}{ab}$;
 д) $\frac{(b-c)^2}{bc}$; е) $\frac{(p-1)^2}{p^2}$. 62. а) $\frac{10x-5y}{x-y}$; г) $\frac{16c}{c-8}$; е) $\frac{mn+1}{n}$; з) $\frac{ab+1}{ab}$.
 63. а) $\frac{2}{1-x^2}$; б) $\frac{2}{a+b}$; в) $\frac{1}{y}$; г) $a+b$. 65. а) $\frac{2a}{a^2-x^2}$; б) $\frac{4b}{b^2-a^2}$; в) $\frac{4}{m^2-n^2}$;
 г) $\frac{x-y}{xy+y^2}$. 66. в) $\frac{x^2+1}{x(x-1)^2}$; г) $\frac{mn}{m^3+n^3}$. 67. б) $\frac{1}{a^2-a}$; в) $\frac{a+b}{ab}$; д) $\frac{3x}{(3-x)^2}$; е) $\frac{1}{(y-1)^2}$.
 68. а) 1; в) $\frac{5a}{4-a^2}$; г) $\frac{2}{(1-x)^2}$. 69. а) $\frac{2x(y-1)}{y}$; г) $\frac{36+b^2}{6+b}$; д) $\frac{8}{x-2}$. 78. а) $\frac{x^2}{a^2}$;
 б) $\frac{b+c}{b-c}$; в) $\frac{5x}{x-y}$; д) $\frac{a+b}{ab+b}$. 80. а) $-10x$; б) $-\frac{a+c}{c}$; в) $-\frac{a+b}{ab}$; г) $\frac{y-x}{y+x}$.
 84. б) $2a-4$; д) $\frac{n+2}{3n-6}$; е) $x+z$; з) $\frac{1}{a(a-b)^2}$. 85. а) $\frac{a^2}{x}$; б) $\frac{2b}{5a}$; в) $\frac{x^5}{y}$;
 г) $\frac{2a^2b^2}{c}$; д) $\frac{y^2}{2}$; е) $\frac{1}{3n^2}$. 86. а) $\frac{(x-3)(x+5)}{x^2}$; б) $\frac{d(b-a)}{a^2}$; в) $\frac{2(x-y)}{x^2}$; г) $\frac{a(a+2)}{6}$.

87. а) $\frac{d^2(d-c)}{(c+d)^2}$; б) $\frac{b-a}{3(a+b)}$; в) $-\frac{2y+2z}{(2y-2z)^2}$; г) $\frac{9}{8(2-x)}$. 88. а) $-\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}$; б) $-\frac{2(x+z)^2}{x^2}$; в) $\frac{p^2+pq+q^2}{p^2-q^2}$; г) $\frac{x^2+4}{x^2-2x+4}$. 91. а) $\frac{x+y}{xy}$; в) $\frac{a-2}{a}$; г) $\frac{u^2}{u-v}$; е) $ab^2 - a^2b$. 92. а) $\frac{b-a}{ab}$; б) $x^2y - xy^2$; в) $\frac{x-y}{xy}$; г) a^2b^2 . 93. а) $\frac{b}{1-b}$; в) $\frac{an}{n+a}$. 94. а) $\frac{uv}{u^2-v^2}$; б) $-\frac{z}{x}$; в) $\frac{a+b}{a-b}$; г) $\frac{2}{y}$. 96. а) $c^2 + \frac{1}{c^2}$; б) -8; в) 2; г) $4a + 4$. 97. б) $\frac{3q+p}{3q-p}$; г) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; д) $\frac{b}{a}$; е) v . 99. а) $\frac{1-x}{x}$; б) $\frac{5-a}{a}$; в) $\frac{y}{y^2-x^2}$; г) $\frac{2b}{4-b^2}$. 100. а) $m-3$; б) $-\frac{1}{n+1}$; в) $\frac{x^2+xy}{y}$; г) $\frac{uv}{u-v}$. 103. а) $-\frac{z+1}{z^2}$; б) $10-2a$; в) a^2+b^2 ; г) $\frac{x-1}{(x+y)^2}$. 120. а) 1,5; б) 2; в) $\frac{2}{9}$; г) $\frac{1}{4}$. 129. а) 10,2 млн шт.; б) 13 980 тыс. км². 131. 460 тыс. телеграмм. 132. а) 86 чашек; б) 9 книг; в) 8 человек на 1 км². 138. а) $a^{-3} < a^{-2}$; б) $a^{-3} > a^{-2}$. 139. а) 0,1; $\frac{10}{11}$; 5; б) 10; $\frac{1}{11}$; $\frac{1}{20}$; в) 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$. 140. а) 510 млн км²; б) 1082 млрд км². 142. За 8,3 мин и за 4,3 года. 143. 11%. 150. а) x^{-11} ; б) a^{-4} ; г) y^{28} ; д) c^{-7} ; з) $0,01b^2$; и) $2x^{-6}$. 151. а) $\frac{1}{25}$; в) 0,01; г) $\frac{1}{27}$; е) 32. 153. а) a^{-2} ; 0,01; в) a^{-4} ; $\frac{81}{16}$. 155. а) 36 000 000; б) 1260; г) 0,0016; д) 0,06; ж) 0,0005. 156. а) $2^{2(x+y)}$; $2^{3(x-y)}$; 2^{-2xy} ; б) 2^{2n} ; 2^{24n} ; 2^{6n} . 157. а) 9; б) 5; в) $\frac{1}{9}$; г) 40,5. 158. а) $2a$; б) $4a$; в) $2a^2$; г) $\frac{a}{2}$. 159. а) $\frac{5}{3}$; б) $\frac{4}{49}$; в) $\frac{3}{2}$; г) $\frac{5}{2}$. 161. а) 0,5; б) 99,99; в) 24. 166. а) $x = 33$; б) $x = -20$; в) $x = -0,4$; г) $x = 8$. 167. а) $x = -3$; б) $x = 1,5$; в) $x = 3$; г) $x = -2$. 168. в) $x = 3$; г) $x = 5$. 169. 3500 р. 171. 1200 м. 172. 10 км. 173. В 196 км от А. 175. 3300 р. 177. а) $x = 7$; б) $x = 1$; в) $x = 4$; г) $x = -1,5$. 178. На 3,75 км. 180. 280 соток. 181. 160 страниц. 182. 14 км. 183. 20 г. 185. 32 г. 187. 64 г. 188. В первом слитке 12 г серебра, во втором — 8 г. 192. Существуют; $n = 0$ и $n = -1$. 193. а) $n = -3$; 0; 1; 4; б) $n = -8$; -3; 0; 1; 3; 4; 7; 12. 196. а) $n = 3k + 1$, $k \in \mathbb{N}$; б) $n = 13k - 4$, $k \in \mathbb{N}$. 199. а) 6,5; б) $-2\frac{1}{3}$; в) -9; г) 100,25. 204. а) $\frac{x+y}{a+y}$; б) $\frac{m+1}{m-1}$; в) $y+1$; г) $\frac{p-q}{p+q}$; д) $\frac{x-y}{x+y}$; е) $x+y$. 206. а) $\frac{2x^4}{(x^2-2)^3}$; б) $\frac{3a^2}{a^3-c^3}$; в) $\frac{a^2+a+1}{a(3-a)}$; г) $\frac{a+b}{b-a}$.

207. а) 3; б) $\frac{a+b}{a-b}$. 217. а) $x = 7$; б) $x = 5$; в) $x = -110$; г) $x = -13$.

218. 30 км. 219. а) 37 км; б) 20 км по шоссе; 28 км по реке.

221. 45 г.

Тест. 1. $\frac{1}{3}$. 2. А3, Б2, В1, Г4. 3. $\frac{a-1}{a+b}$. 4. $\frac{a+x}{x}$. 5. 4). 6. $\frac{2x^2+18}{x^2-9}$.

7. $-\frac{2m}{m+1}$. 8. $\frac{x+y}{2xy}$. 9. $\frac{a+b}{b-a}$. 10. 2). 11. 1). 12. 3). 13. 3). 14. 20.

15. $x = 3\frac{1}{3}$. 16. А2, Б3, В1.

Глава 2

265. а) $a = \sqrt{2S}$; $a \approx 4,5$ см; б) примерно 4 с. 270. а) $H = \frac{3V}{\pi R^2}$; $R = \sqrt{\frac{3V}{\pi H}}$;

б) $h = \frac{3V}{2\pi R^2}$; $R = \sqrt{\frac{3V}{2\pi h}}$. 271. 4) Перебором натуральных чисел, не пре-

восходящих $\sqrt{a}$. 274. $\approx 5,6$ м. 278. 100 см. 279. 30 см и 40 см.

282. $r \approx 4,2$ см. 283. а) $AB = 10$; б) $AB = 13$; в) $AB = 5$. 284. Нельзя.

285. а) $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. 287. в) Указание. Используйте следующие равенства: $\sqrt{10} = \sqrt{9+1}$; $\sqrt{13} = \sqrt{9+4}$; $\sqrt{17} = \sqrt{16+1}$. 304. а) 4; 0;

б) 2; 0; в) $5 + \sqrt{2}$; $5 - \sqrt{2}$; д) $10 + \sqrt{2}$; $10 - \sqrt{2}$; е) 5; -3. 305. а) $a + b = 10$;

б) $a - b = 4$ или $a - b = -4$; г) $a + b = 3$ или $a + b = -3$; д) 4. 307. а) $\sqrt{8}$;

б) $2\sqrt{3}$; в) 5; г) 18. 314. а) $0,5^2 < 0,5 < \sqrt{0,5}$; б) $\sqrt{12,5} < 12,5 < 12,5^2$.

322. а) $\frac{3}{20}$; б) $\frac{16}{21}$; в) $\frac{7}{6}$; г) $5\frac{17}{20}$. 326. в) 1500; г) 3600; д) 9,6; е) 0,009.

330. г) 44; д) 6; е) $\frac{1}{5}$; ж) $\frac{3}{2}$; з) $\frac{10}{3}$. 331. а) 60; б) $\frac{1}{2}$; в) 36; г) $\frac{1}{15}$. 339. ж) $\sqrt{0,5}$;

з) $\sqrt{10}$. 342. г) $2\sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; д) $5\sqrt{\frac{3}{5}} = 3\sqrt{\frac{5}{3}}$; е) $\frac{1}{3}\sqrt{20} > \frac{1}{2}\sqrt{8}$. 344. а) $2\sqrt{3}$;

б) $-\sqrt{2}$; в) $\frac{1}{18}$; г) -18; д) $27\sqrt{2}$; е) $-2\sqrt{2}$. 348. а) $300\sqrt{2}$; б) $540\sqrt{3}$;

в) $720\sqrt{3}$; г) $2400\sqrt{7}$. 349. а) $12a^3$; д) $6m^2\sqrt{2m}$; е) $3\sqrt{6n}$.

350. в) $-2\sqrt{\frac{1}{2}} < -\sqrt{0,6} < \sqrt{\frac{3}{5}} < 2\sqrt{0,2} < 1$; г) $\frac{5}{12} < \frac{\sqrt{3}}{4} < \frac{\sqrt{2}}{3}$. 354. д) $2\sqrt{2}$; е) $7\sqrt{3}$;

ж) $2\sqrt{2}$; з) $\sqrt{5} - 4\sqrt{3}$; и) $6\sqrt{7} - \sqrt{6}$. 355. а), г) Рациональным; б), в) ир-

рациональным. 357. д) $30 - 5\sqrt{5}$; е) $2\sqrt{66}$. 358. в) $2\sqrt{3}$; г) $1 - 2\sqrt{6}$.

- 359.** б) $2\sqrt{5} - 5$; в) $2\sqrt{5} - 5$; г) $-2\sqrt{5} - 5$. **360.** б) $\frac{1}{4}$ и $-2\sqrt{3}$;
 в) $\frac{3}{2\sqrt{6}}$ и $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$; г) $\frac{3}{2\sqrt{5}}$ и $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **362.** а) $3\sqrt{2} - 2 \text{ см}^2$; б) $10 + \sqrt{2} \text{ см}^2$. **365.** 4).
368. в) $-3\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$; г) $10(\sqrt{15} - 6)$. **369.** б) $0,1(\sqrt{m} - \sqrt{n})$. **370.** а) $\frac{2}{3}$;
 б) $-\frac{1}{4}$. **371.** б) -76 ; г) $-17 - 4\sqrt{6} - 10\sqrt{2}$. **372.** б) 3 ; г) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **374.** а) 38 ;
 б) $4\sqrt{5} - 4$. **375.** а) 3 ; б) 3 . **376.** а), б), г) Верно; в) неверно.
377. а) $2\sqrt{6}$; б) $-4\sqrt{6}$. **378.** а) -1 ; б) $\frac{17}{64}$. **381.** а) $\frac{5 + \sqrt{5} + \sqrt{30}}{10}$;
 б) $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt{30}$. **382.** а) $\frac{\sqrt{ab}}{b}$; б) $\frac{2\sqrt{y}}{y}$. **384.** а) $-9a$; б) $2x\sqrt{6}$;
 в) $0,4ac$; г) $-2\sqrt{2}mn$. **386.** б) y^{2n} ; в) $|x^n|$. **387.** а) Это график зависимости $y = |x|$; б) эту зависимость можно задать равенством $y = x$, где $x \geq 0$. **390.** в) 5 и 6 ; г) 6 и 7 . **391.** а) $1,260$; б) $2,154$; в) $3,302$;
 г) $0,464$; д) $4,031$; е) $0,368$. **396.** 4 дм . **398.** $a = \sqrt[3]{4\sqrt{3}V}$. **399.** $\approx 10 \text{ м}$.
401. 4) $\sqrt{0,51} < \sqrt{0,96} < \sqrt[3]{0,96} < 1 < \sqrt[3]{5,1} < \sqrt[3]{7,4} < \sqrt{7,4} < \sqrt{10}$.
402. а) $5 + \sqrt{2}$; б) $2 + \sqrt{5}$. **403.** а) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$; б) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$; в) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$;
 г) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$. **404.** а) $3 - 2\sqrt{2}$; б) $\sqrt{10} + \sqrt{2}$. **406.** а) $1 + \sqrt{11}$; б) $3\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$.
407. $\sqrt{57 - 12\sqrt{15}} = 3\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$. **409.** б) $s = \frac{at^2}{2}$; $a = \frac{2s}{t^2}$; в) $m_1 = \frac{v_2^2 m_2}{v_1^2}$;
 $m_2 = \frac{v_1^2 m_1}{v_2^2}$. **412.** а) $0,03$; б) 8 ; в) -3 ; г) $4,8$. **416.** а) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$;
 б) $\frac{\sqrt{7}}{2 - \sqrt{7}}$; в) $\frac{21}{2 + \sqrt{10}}$; г) $-\frac{6\sqrt{15}}{11}$. **417.** а) $\frac{2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$; б) $\sqrt{ab}$; в) $\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$;
 г) $\frac{2 - \sqrt{a}}{2 + \sqrt{a}}$; д) $1 + \sqrt{a} + a$; е) $\frac{1}{3 + \sqrt{x}}$. **418.** а) $\frac{1 - \sqrt{a}}{3}$; б) $\frac{1 - \sqrt{x}}{3}$.
419. а) $-3a^3b^3$; б) $4a^3b\sqrt{b}$. **422.** а) $4! = 24$; б) 20 .

- Тест.** 1. 1. 2. 3). 3. $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. 4. $\sqrt{0,4}$. 5. L . 6. 3). 7. 4). 8. А2, Б3, В1.
 9. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 10. 3). 11. $0,3 < \sqrt{0,3} < \sqrt{1,5} < 1,5$. 12. 60. 13. 4). 14. 6.
 15. 2). 16. $\frac{4}{3}$. 17. 1). 18. $2\sqrt{15}$. 19. $\frac{1}{3}$. 20. 3 и 4.

Глава 3

429. б) -12 ; -2 ; г) нет корней. 431. а) $-\frac{2}{3}$; 2 ; г) нет корней; е) $\frac{3}{2}$. 438. в) $-\frac{3}{5}$; 1 ; д) 3 ; $3\frac{1}{2}$; з) $-\frac{2}{7}$; 1 . 439. в) $-1\frac{2}{3}$; -1 ; г) $-1\frac{1}{2}$; 2 . 441. г) $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$; е) $6-3\sqrt{2}$; $6+3\sqrt{2}$. 445. б) $-1\frac{1}{2}$; 0 ; $1\frac{1}{5}$; г) 0 ; $1\frac{1}{2}$. 446. б) -4 ; $\frac{2}{3}$; 1 ; г) -5 ; $-1\frac{1}{2}$; 3 . 450. г) 4 ; 14 ; е) -1 ; 2 ; з) -2 ; 14 . 451. е) $-\frac{7}{10}$; $\frac{1}{2}$; з) -6 ; $1\frac{1}{2}$. 454. б) -1 ; 2 ; в) $\frac{2}{3}$; 4 . 456. б) $-\sqrt{7}$; г) $-\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$. 457. в) -1 ; 1 ; г) нет корней. 459. в) 1 ; 9 ; г) 16 ; 25 . 460. а) $\frac{1-\sqrt{41}}{2}$; $\frac{1+\sqrt{41}}{2}$; -1 ; 2 ; б) $2-\sqrt{3}$; $2+\sqrt{3}$. 465. а) -15 и -14 ; 14 и 15 ; б) 17 и 19 . 466. а) -7 ; -6 ; б) 7 ; 9 ; в) 2 решения: 4 и 5 ; -5 и -4 . 467. а) 21 см и 30 см; б) 11 м и 15 м. 468. 20 м и 30 м; 10 м и 60 м. 469. 70 см. 470. 5 см, 12 см, 13 см. 471. 12 км/ч, 16 км/ч. 474. а) $3,4$ с; б) $9,2$ с. 475. а) 1 с и 2 с. 476. $0,6$ с и $1,4$ с. 477. 12 дм и 18 дм. 479. $1,5$ м. 480. $0,5$ м. 481. Да: 6 , 8 , 10 . Нет. 483. 6 человек. 484. 17 учащихся. 485. 16 шахматистов. 486. 15 точек. 487. На 30% . 488. На 20% . 489. $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$. 493. в) $-2\sqrt{3}$; $2\sqrt{3}$; д) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 496. г) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; д) 0 ; 5 . 497. в) $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; 0 ; д) 0 ; 5 . 498. а) 5 и 6 ; б) 7 и 8 . 499. а) $2,4$ дм; б) 240 см². 501. 5×15 см и 5×10 см. 502. а) 2 с; б) $2,4$ с. 503. а) $-\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{\frac{2}{3}}$; б) $2\sqrt{6}$; $-2\sqrt{6}$; в) 0 ; 3 ; г) $-\sqrt{7\frac{1}{3}}$; $\sqrt{7\frac{1}{3}}$. 505. а) -1 ; 1 ; б) 0 ; 1 ; 3 ; в) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; -2 ; 2 ; г) $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; 5 . 510. Указание. Введите замену: а) $y = 6 - 3x$; б) $y = 5x - 8$. 511. а) 3 и 4 ; б) 6 и 8 . 512. ≈ 2 см и ≈ 4 см. 523. б) $x = -\frac{2}{3}$; $p = 8$. 524. б) $x = -\frac{9}{2}$; $q = -27$. 527. а) $y^2 - 183y - 222 = 0$; б) $y^2 + 185y - 1814 = 0$. 528. б) $x^2 - 2x - 3 = 0$ и $x^2 + 2x - 3 = 0$. 535. в) $(3-z)(4z+1)$; е) $(n+1)(7n+2)$. 538. в) $\frac{y-3}{2y}$; е) $\frac{n+1}{n+4}$. 539. в) $x(x-8)(x-4)$; г) $x^2(x-2)(x+3)$. 543. б) $k = 4$; г) $k = -12$.

544. д) $\frac{2x-5}{2x-1}$; е) $-\frac{3x+2}{x+3}$. 545. г) $(a-2)(a+2)(a+1)(3a-1)$.
 547. е) $(x+1)(x+3)$. 550. б) 3; -7; -1; в) -1; 5; д) -1; 1; -2; 2; 3.
 551. а) 1; -2; б) -1; 2; 11; в) -1; 3; $\frac{3}{2}$; г) 1; 10; $-\frac{1}{5}$. 552. а) $(x+1)(x-1)^3$;
 б) $(x+1)^2(x+2)(x-3)$; в) $(x-1)(x+5)(4x+5)$; г) $(x-1)(x+1)(5x+3)$.
 555. а) $\pm\sqrt{2}$; ± 2 ; б) ± 1 ; в) $\pm\frac{1}{3}$; ± 3 ; г) нет решений. 556. а) 1; 25;
 в) $\frac{1}{25}$; 1. 557. а) 0; б) 0. 558. б) 10 м и 14 м. 560. Да. -2; -1; 0;
 1; 2. 561. 20 школьников. 562. На 150 тетрадей. 563. а) $ax^2 + mbx + m^2c = 0$. 567. а) $\frac{-a-2}{a^2+a+1}$; б) $\frac{2a-14}{a^2-2a+4}$. 570. а) 35; б) 5040.
 Тест. 1. 3; 3,5. 2. А2, Б3, В1. 3. -7 и 3. 4. -4 и $\frac{3}{2}$. 5. -48.
 6. 4). 7. Два корня. 8. 3). 9. $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$. 10. 0 и 3. 11. 0; 0,5; -0,5.
 12. 4). 13. -3; 3. 14. 3). 15. 2). 16. 2). 17. 3; 8 и -4; 1. 18. 4).

Глава 4

573. 1), 2), 4). 577. в) (1; 8), (2; 6), (3; 4), (4; 2); г) (2; 5), (4; 4),
 (6; 3), (8; 2), (10; 1). 582. Пятиугольников и шестиугольников со-
 ответственно 2 и 15, 8 и 10, 14 и 5, 20 и 0. 583. 8 решений; по ал-
 гебре и геометрии соответственно: 4 и 22, 8 и 19, 12 и 16, 16 и 13,
 20 и 10, 24 и 7, 28 и 4, 32 и 1. 584. 4 решения: 18 ч и 0 тарелок,
 19 ч и 5 тарелок, 20 ч и 10 тарелок, 21 ч и 15 тарелок.
 585. 3 решения: 5 и 12 задач, 10 и 8 задач, 15 и 4 задачи. 593. 3).
 598. а) (2; 6); б) (5; 4). 599. 45 кв. ед. 602. а) $a = 2$; б) $b = 3$.
 603. а) (3; 3), (6; 2), (9; 1); если считать, что координатной четвер-
 ти принадлежат и оси, то надо добавить ещё точки (0; 4) и (12; 0);
 б) 3 точки; если считать и точки на координатных осях, то 5 точек.
 605. (0; 0), (1; 0), (-1; 0), (0; -2). 606. (1; 0), (-3; 0), (0; $\sqrt{3}$),
 (0; $-\sqrt{3}$). 626. а) Прямые не пересекаются; б) точка пересечения
 (-2; 3); в) точка пересечения (4; 1); г) прямые не пересекаются.
 627. а) $y = 20 - 9x$; б) $y = 1,5 - 0,2x$; на высоте 0,7 м; через 7,5 ч.
 629. в) $y = \frac{2}{3}x + 5$. 639. а) (0; 0); б) (7; -5); в) (0,8; -1,3);
 г) $(\frac{6}{7}; \frac{1}{7})$; д) $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$; е) (-0,6; 3). 640. а) (3; -1); б) (6; -2); в) (57; 48);
 г) (1; 2); д) (2; -1); е) (2; -2). 641. а) $x = 4$, $y = -5$; б) $x = 10$,

- $y = 11$; в) $x = \frac{4}{11}$, $y = 1\frac{7}{11}$; г) $x = -0,6$, $y = -4,2$. **645.** а) $x = 8$, $y = 6$;
 б) $u = 2,5$; $v = 3$; в) $p = 10,5$, $q = 14$; г) нет решений.
646. а) $x = 7,5$, $y = -3,5$; б) $a = 12,5$, $b = -2,5$. **647.** До оси x 0,8,
 до оси y 0,6, до начала координат 1. **652.** а) (5; -2); б) (1; -1);
 в) (-47; 125); г) (-5; -7); д) (1; -3); е) (2; 1). **653.** а) (4; -5), IV четверть;
 б) (10,5; 12,5), I четверть; в) (-13,5; -33), III четверть; г) (-6; 24),
 II четверть. **654.** а) (-4; -3) и (4; 3); б) (4; 2) и (2; 4); в) (3; -2)
 и (-3; 2); г) ($\sqrt{8}$; $\sqrt{8}$) и ($-\sqrt{8}$; $-\sqrt{8}$). **655.** а) (8; 4) и (4; 8); б) (-2; -6)
 и (6; 2); в) (0; 2) и (-4; -2); г) (-6; -2) и (2; 2); д) (7; 3) и (7; -3);
 е) (-2; 3) и (2; 3). **656.** а) Пересекаются, точки пересечения: (-2; 4)
 и (1; 1); б), г) не пересекаются; в) пересекаются, точки пересечения:
 (3; -9) и (-1; -1). **657.** а) (2; -5); б) (-3; 4); в) (12; 9); г) (-18; 6).
658. а) $(-2; \frac{2}{5})$; б) (4; -4); в) $(\frac{1}{2}; 1)$; г) $(\frac{1}{6}; \frac{1}{4})$. **659.** а) $x = 90$, $y = 120$,
 $z = 3$; б) $m = -10$, $n = 12,5$, $p = -2,5$; в) $a = 0$, $b = -3$, $c = -1$; г) $s = -1$,
 $u = -4$, $v = 1$. **660.** а) $x = -2$, $y = 0$, $z = 4$; б) $u = 4$, $x = -1$, $y = -2$,
 $z = 3$. **661.** а) $x = 2$, $y = 0$, $z = 1$; б) $x = 20$, $y = 5$, $z = 15$; в) $x = 6$,
 $y = 1$, $z = -4$; г) $x = 12$, $y = 2$, $z = -4$. **662.** а) (-2; 4), (3; -1); б) (1; 1),
 (-0,6; 1,8). **663.** а) $x = 17$, $y = 15$; $x = 10$, $y = 6$; б) $x = 8$, $y = 7$; $x = 4$,
 $y = 1$; в) $x = 12$, $y = 10$. **667.** а) 20 пятикопеечных и 5 десятикопеечных;
 б) 6 коробок по 250 г и 4 коробки по 150 г. **668.** а) 240 р.,
 60 р.; б) 12 р. — цена пирожка, 10 р. — цена бутылки воды.
669. а) 800 000 р. и 1 000 000 р.; б) 200 р. и 260 р. **670.** а) По 6000 р.;
 б) 420 девочек и 480 мальчиков. **671.** а) Невозможна; б) возможна.
672. а) 6 и 14; б) 8 и 15. **673.** а) 24 м и 30 м; б) 15 м и 25 м.
674. а) 8 см и 6 см; б) 5 см и 12 см. **675.** 15 км. **676.** 9000 р.
677. Существует, 5 шестиугольников и 10 квадратов. **678.** 750 г
 и 250 г. **679.** а) 14 мл 60%-ного и 21 мл 80%-ного; б) 25 мл
 4%-ного и 50 мл 10%-ного. **680.** а) 4 ч 15 мин и 12 ч 45 мин;
 б) 3 ч со скоростью 70 км/ч и 1 ч со скоростью 90 км/ч. **681.** 35 лет,
 10 лет, 60 лет. **682.** 25 км, 40 км, 60 км. **683.** 3 кг, 3 кг, 2 кг.
688. а) $7x + 4y = 19$; б) $4x - 5y = 1$. **689.** а) $y = 1,5x + 1$;
 б) $y = -0,75x + 2,5$. **690.** а) (2; -2); не проходит; б) проходят.
691. При $k = 1$. **693.** а) Да; б) нет. **694.** (-3; 4); (-5; -4); (0; 2).
695. а) $y = \frac{1}{3}x + 1$; б) $y = \frac{1}{3}x - 1$; в) $y = -\frac{1}{3}x - 1$. **696.** 5) б) $y = \frac{2}{3}x - 4$;
 в) $y = \frac{2}{3}x + 3$. **702.** $\begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq 4 \end{cases}$ (рис. 4.40); $\begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq 2x \end{cases}$ (рис. 4.41);

$$\begin{cases} y \leq x + 2 \\ y \leq -x + 2 \\ y \geq 0 \end{cases} \text{ (рис. 4.42); } \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ |x| \geq 1 \end{cases} \text{ (рис. 4.43). 704. а) При } a = \pm 3;$$

б) при $b = \pm 2$. 705. а) При $c = 1$; б) при $a = 2$. 710. а) Можно; возможные способы: одна двухрублёвая и 7 пятирублёвых монет; 6 двухрублёвых и 5 пятирублёвых монет; 11 двухрублёвых и 3 пятирублёвые монеты; 16 двухрублёвых монет и одна пятирублёвая монета; б) 2 маленьких и 7 больших. 711. а) (1; 4), (3; 3),

(5; 2), (7; 1); б) (-1; 6), (-3; 3). 712. а) $(\frac{1}{4}; \frac{2^3}{4})$; б) (4; 2);

в) (-1; 2); г) (2; -1). 713. а) 4; б) 3. 714. а) 6; б) 60. 715. а) Сестре 5 лет, брату 1 год; б) сестре 12 лет, брату 16 лет. 716. б) 15 заданий. 718. 400 г арахиса и 300 г лесных орехов. 719. 35 лет, 30 лет и 5 лет. 720. 35 л, 20 л, 25 л. 721. 30 км. 722. 800 р. 725. а) $3 \cdot 6! = 2160$; б) $2 \cdot 2 = 4$.

Тест. 1. 2). 2. 3). 3. 4). 4. 4). 5. 2). 6. А3, В2, В4, Г1. 7. А3, В2, В1, Г4. 8. 4). 9. 4). 10. 1). 11. 4). 12. 3). 13. $x = 1$, $y = -\frac{1}{3}$. 14. 2).

Глава 5

736. 1) а) Олег — 100 м/мин, Пётр — 75 м/мин; б) Олег — 80 м/мин, Пётр — ≈ 86 м/мин. 738. б) $c = 50 - 4n$, n — натуральное число,

$n \leq 12$. 739. а) $p = \frac{n(n-3)}{2}$, n — натуральное число, $n \geq 4$;

б) $r = \frac{m(m-1)}{2}$, m — натуральное число, $m \geq 2$. 745. 4). 746. в) $x = 12$;

г) $x = 0,1$. 747. г) x — любое число; д) $x \neq -1,5$ и $x \neq 1,5$.

749. б) $4\sqrt{3} - 1$; $5\frac{2}{3}$; 6. 752. в) $x = -1$ и $x = 1$; г) $x = \sqrt[3]{-33}$.

753. а) $x \geq 0$ и $x > 0$; б) $x \neq 2$ и $x \neq \pm 2$. 755. а) -1; б) 0; в) 7; г) 4.

765. а) В точках (-4; 0) и (3; 0); б) нет; в) в точках (0; 0); (1; 0) и (-1; 0); г) нет. 766. в) Ось x — в точках (-4; 0) и (4; 0), ось y —

в точке (0; -16); г) ось x — в точках $(-\sqrt{2}; 0)$ и $(\sqrt{2}; 0)$, ось y —

в точке (0; 2). 772. 2) $y = -x^2 - 1$. 775. а) A(-3; 0); B(1; 0); C(0; -3);

б) A($-\sqrt{5}$; 0); B(-1; 0); C(1; 0); D(0; 5). 780. в) -1; $\frac{2}{3}$; г) $-\sqrt{10}$; $\sqrt{10}$.

781. в) -5; 0; 5; г) 0; 36. 785. б) -1; 0; 4; в) -1; 1; г) 1; е) -3; 0.

791. $y = 1000 - 25x$. 792. а) $f(0,3) = 28$; $f(-2,4) = -242$; б) $f(x) = 0$

при $x = 0,02$; $f(x) = -5$ при $x = -0,03$. **797.** а) $f(x) = g(x)$ при $x = 4$; $f(x) > g(x)$ при $x > 4$; $f(x) < g(x)$ при $x < 4$. **798.** а) $y = 5x + 10$ и $y = 2x + 10$; б) $y = 50x$ и $y = 50x - 25$. **801.** 1; 4 км/ч. **804.** а) $s = 40t + 20$, где s — расстояние, см; t — время, мин; б) $0 \leq t \leq 9,5$. **805.** а) $y = 0,3x$, где y — расстояние, км; x — время, с; б) $y = \frac{x}{0,3}$, где y — время, с; x — расстояние, км. **806. 1. 819.** а) $(1; -1)$ и $(-1; 1)$; б) $(1; 2)$ и $(-2; -1)$. **822. 1) б)** $(\sqrt{3}; \sqrt{3})$ и $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$; 2) а) $(-\sqrt{6}; -\sqrt{6})$; $(\sqrt{6}; \sqrt{6})$; б) $(-\sqrt{15}; \sqrt{15})$; $(\sqrt{15}; -\sqrt{15})$. **823.** $k = -3$. **845.** Точки с ординатой 7 есть, их абсциссы $2 - 2\sqrt{2}$ и $2 + 2\sqrt{2}$; точек с ординатой -15 нет. **846.** а) Да, в точках $(-2\sqrt{2}; 12)$ и $(2\sqrt{2}; 12)$; б) нет. **847.** $y < 0$ при $x > 1,4$; $y \geq 0$ при $y \leq 1,4$. **854.** а) $6! = 720$; б) $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$; 6. **855.** От 1000 до 4000 мужчин и примерно 200 женщин. **856.** Шанс письма из сектора 1 равен $\frac{6}{13}$; письма из сектора 4 — $\frac{3}{13}$, письма из сектора 8 — $\frac{4}{13}$.

Тест. 1. $s = 800 - 70t$. 2. 4). 3. 3). 4. 19. 5. -100. 6. $x \neq -2$ и $x \neq 2$. 7. 2) и 4). 8. 3). 9. 3). 10. 2), 3). 11. Оля — 1); Ира — 3); Зоя — 4); Аня — 2). 12. 2). 13. 2). 14. 3). 15. 4).

Глава 6

862. а) 36; б) 32. **863.** а) $\approx 3,8$; 4; 4. **864.** Среднее арифметическое $\approx 2,8$, мода и медиана 3. Среднее арифметическое увеличится, мода и медиана не изменятся. **865.** 1) 152 000; 100 000; 100 000. **866.** б) 1,9; в) 2; г) 2. **868.** В третьей. **869.** а) — в) Нет. **872.** а) 0,25; б) $\frac{3}{8}$; в) 0,95. **873.** $P(A) = \frac{1}{36}$; $P(B) = \frac{1}{9}$; $P(C) = \frac{1}{2}$; $P(D) = \frac{8}{9}$. **876.** а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{11}{45}$. **877.** $\frac{2}{3}$. **878.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{24}$; в) $\frac{1}{6}$. **879.** Одна красная и пять жёлтых. **880.** $P_{\text{красный}} = \frac{4}{15}$, $P_{\text{жёлтый}} = 0$, $P_{\text{не зелёный}} = \frac{1}{3}$; 11 карандашей. **881.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{3}$. **882.** а) $\frac{2}{7!}$; б) $\frac{2 \cdot 2}{12!} = \frac{4}{12!}$. **883.** Так как только 1000 натуральных чисел имеют квадраты, не превышающие 1 000 000, то $P = 0,001$. **884.** 0,5. **886.** а) $\frac{1}{36}$; $\frac{1}{18}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{18}$; $\frac{1}{36}$; б) справедлива. **887.** 1000; $\frac{1}{1000}$. **888.** а) $\frac{3!}{5!} = \frac{1}{20}$; б) $\frac{2 \cdot 3!}{5!} = \frac{1}{10}$; в) $\frac{2 \cdot 4!}{5!} = \frac{2}{5}$.

889. а) $\frac{1}{32}$; б) $\frac{1}{32}$. 890. $P(A) = \frac{7}{8}$; $P(B) = \frac{7}{8}$; $P(C) = \frac{1}{4}$; $P(D) = \frac{3}{4}$;

$P(E) = 0$. 891. 7; $\frac{1}{6}$. 892. $\frac{60 \cdot 60}{10^5} = 0,036$. 893. а) $\frac{1}{16}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{9}{16}$; б) $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$.

894. а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{4}{9}$; в) $\frac{1}{3}$. 895. 0,18. 896. а) 0,75; б) $\frac{2\sqrt{2}-1}{2}$. 897. 0,64.

901. а) 19; б) 20. 902. а) 11; б) 16. 903. 15. 904. а) Увеличатся на 10; б) увеличатся в 10 раз. 905. а) 0,9; б) 0,33; в) 0,75; г) 0,81.

906. а) $\frac{4}{11}$; б) $\frac{2}{11}$. 907. 1) а) $\frac{1}{7}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{3}{28}$. 908. 1) а) $\frac{13}{125}$; б) $\frac{12}{125}$; 2) нет.

909. 13. 910. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) $\frac{n-1}{n}$.

Тест. 1. В1, Г2, А3, Б4. 2. Среднее арифметическое $\approx 3,9$; мода 4; медиана 4. 3. 1) и 4). 4. 2). 5. 50. 6. 4). 7. 2). 8. $\frac{1}{720}$. 9. Жёл-

тых — 1, красных — 3, синих — 2.

Предметный указатель

- Алгебраическая дробь** 6
 — —, основное свойство 12
Аргумент 238
- Биквадратное уравнение** 135
- Величина зависимая** 236
 — независимая 236
Вероятность случайного события 294
- Гипербола** 268
График зависимости $y = \sqrt{x}$ 90
График уравнения с двумя переменными 176
 — — $ax + by = c$ 176
 — — $y = kx$ 183
 — — $x^2 + y^2 = r^2$ 202
График функции 244, 245
- Иррациональные числа** 71
- Квадратного корня свойства:**
 корень из произведения 93
 корень из частного 94
Квадратного уравнения
 дискриминант 128
 — — формула корней 128, 129, 133
Квадратное уравнение 123
 — — неполное 143
 — — приведённое 123
Квадратный корень 84
 — — арифметический 85
Квадратный трёхчлен 154
Корень кубический 106
 — n -й степени 107
Корни квадратного трёхчлена 154
Кубическая парабола 107
- Медиана** 286
Множество допустимых значений переменной 7
Мода 286
- Нули функции** 252
- Переменная зависимая** 237
 — независимая 237
- Правила сложения и вычитания алгебраических дробей** 18
 — умножения и деления алгебраических дробей 26
 — умножения и деления корней 94
Приём выделения квадрата двучлена 124
- Радикал** 66
Размах 284
Решение системы уравнений с двумя переменными 191
 — уравнения с двумя переменными 170
- Система уравнений** 191
Способ подстановки 200
 — сложения 193, 194
Среднее арифметическое 285
Стандартный вид числа 36
Степени основное свойство 43
Степень с отрицательным целым показателем 35
 — — нулевым показателем 36
- Теорема Виета** 149
 — обратная теореме Виета 150
 — Пифагора 79
- Угловой коэффициент**
 прямой 185
Уравнение с двумя переменными 170
 — — — линейное 171
 — прямой 177
Условие параллельности прямых 185
- Формулы Виета** 149
Функции область определения 239
 — свойства 252, 253
Функция 238
 — линейная 257
 — обратная
 пропорциональность 266
 — прямая пропорциональность 257

Оглавление

Предисловие	3
-------------------	---

Глава 1. Алгебраические дроби



1.1. Что такое алгебраическая дробь	5
1.2. Основное свойство дроби	11
1.3. Сложение и вычитание алгебраических дробей	17
1.4. Умножение и деление алгебраических дробей	26
1.5. Преобразование выражений, содержащих алгебраические дроби	30
1.6. Степень с целым показателем	35
1.7. Свойства степени с целым показателем	43
1.8. Решение уравнений и задач	48
1.9. Сокращение дробей (Для тех, кому интересно)	53
Дополнительные задания	57
Чему вы научились	62

Глава 2. Квадратные корни



2.1. Задача о нахождении стороны квадрата	66
2.2. Иррациональные числа	70
2.3. Теорема Пифагора	78
2.4. Квадратный корень (алгебраический подход)	84
2.5. График зависимости $y = \sqrt{x}$	89
2.6. Свойства квадратных корней	93
2.7. Преобразование выражений, содержащих квадратные корни ..	100
2.8. Кубический корень	106
2.9. Двойные радикалы (Для тех, кому интересно)	111
Дополнительные задания	114
Чему вы научились	117

Глава 3. Квадратные уравнения



3.1. Какие уравнения называют квадратными	122
3.2. Формула корней квадратного уравнения	127
3.3. Вторая формула корней квадратного уравнения	132
3.4. Решение задач	136
3.5. Неполные квадратные уравнения	143
3.6. Теорема Виета	148
3.7. Разложение квадратного трёхчлена на множители	154
3.8. Целые корни уравнения с целыми коэффициентами (Для тех, кому интересно)	159
Дополнительные задания	162
Чему вы научились	166

Глава 4. Системы уравнений

4.1. Линейное уравнение с двумя переменными	170
4.2. График линейного уравнения с двумя переменными	175
4.3. Уравнение прямой вида $y = kx + l$	182
4.4. Системы уравнений. Решение систем способом сложения	191
4.5. Решение систем уравнений способом подстановки	200
4.6. Решение задач с помощью систем уравнений	205
4.7. Задачи на координатной плоскости	212
4.8. Геометрическая интерпретация неравенств с двумя переменными (Для тех, кому интересно)	216
Дополнительные задания	219
Чему вы научились	223

Глава 5. Функции

5.1. Чтение графиков	227
5.2. Что такое функция	236
5.3. График функции	244
5.4. Свойства функций	252
5.5. Линейная функция	256
5.6. Функция $y = \frac{k}{x}$ и её график	266
5.7. Целая и дробная части числа (Для тех, кому интересно)	272
Дополнительные задания	274
Чему вы научились	279

Глава 6. Вероятность и статистика

6.1. Статистические характеристики	284
6.2. Вероятность равновероятных событий	292
6.3. Сложные эксперименты	298
6.4. Геометрические вероятности (Для тех, кому интересно)	301
Дополнительные задания	303
Чему вы научились	306

Ответы	308
Предметный указатель	318

Учебное издание

Дорофеев Георгий Владимирович
Суворова Светлана Борисовна
Бунимович Евгений Абрамович
Кузнецова Людмила Викторовна
Минаева Светлана Станиславовна
Рослова Лариса Олеговна

АЛГЕБРА

8 класс

Учебник
для общеобразовательных
организаций

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики
Зав. редакцией *Т.А. Бурмистрова*
Редактор *Л.В. Кузнецова*
Младшие редакторы *Е.А. Андреевкова, Е.В. Трошко*
Художник *О.П. Богомолова*
Художественный редактор *О.П. Богомолова*
Фотографии *ООО «Лори», фотобанка «Picvario»*
Компьютерная верстка
и техническое редактирование *О.В. Храбровой*
Компьютерная графика *К.В. Кергелен*
Корректоры *И.А. Григалашвили, М.А. Павлушкина*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000.
Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 30.06.15. Формат
70×90¹/₁₆. Бумага офсетная. Гарнитура SchoolBookCSanPin. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 19,91 + 0,52 форз. Тираж 2000 экз. Заказ № 41433 (п-гз).

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано по заказу ОАО «ПолиграфТрейд» в филиале «Смоленский
полиграфический комбинат» ОАО «Издательство «Высшая школа».
214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.

Тел.: +7(4812) 31-11-96. Факс: +7(4812) 31-31-70.
E-mail: spk@smolpk.ru <http://www.smolpk.ru>